HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG.

ZWEITER THEIL.

HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG,

ALS LEITFADEN

ZUM GEBRAUCH BEI VORLESUNGEN

ZUSAMMENGESTELLT

VON

DR. ROBERT FRICKE,

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG

ZWEITER THEIL.

MIT 15 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1897.

VORWORT.

Das vorliegende zweite Heft des „Leitfadens zur Vorlesung über Differential- und Integralrechnung“ giebt den Stoff wieder, welcher an hiesiger Hochschule im zweiten Studiensemester zur Behandlung kommt. Einige Gegenstände aus dem letzten Kapitel sind zwar mehrfach erst in der Vorlesung des dritten Semesters zum Vortrag gekommen, welche dann in der Hauptsache der Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen gewidmet bleibt.

In Anordnung und Art der Darstellung schliesst sich das zweite Heft durchaus an das zu Beginn des Jahres erschienene erste Heft an.

Die beifällige Aufnahme dieses ersten Heftes seitens der Herren Fachgenossen ist mir durch zahlreiche Zuschriften bezeugt. Diese letzteren sind sämmtlich für mich sehr ehrend und interessant gewesen, und ich wollte bei dieser Gelegenheit meinem lebhaftesten Danke Ausdruck geben.

Braunschweig, im März 1897.

Robert Fricke.

INHALTSVERZEICHNISS.

IX. Capitel.

Complexe Zahlen und Functionen complexer Variabelen.

X. Capitel.

Hülfssätze aus der Algebra.

XI. Capitel.

Weiterführung der Integralrechnung.

XII. Capitel.

Differentiation und Integration der Functionen mehrerer unabhängigen Variabelen.

XIII. Capitel.

Bestimmung der Maxima und Minima einer Function mehrerer Variabelen.

XIV. Capitel.

Geometrische Anwendungen der Functionen mehrerer Variabelen.

IX. Capitel.

Complexe Zahlen und Functionen complexer Variabelen.

1. Einführung der complexen Zahlen.

Die quadratische Gleichung $x^2 = -1$ kann weder durch eine positive, noch durch eine negative Zahl x, noch auch durch $x = 0$ gelöst werden.

Sagt man demnach [unter Beibehaltung des auf die in I, 1 [1]) eingeführten Zahlen bezogenen Operationszeichens der Quadratwurzelziehung], $x = \sqrt{-1}$ sei eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$, so ist in $\sqrt{-1}$ ein gegenüber I, 1 neuer Zahlbegriff geschaffen. Diese neue Zahl $\sqrt{-1}$, welche auch abgekürzt mit i bezeichnet wird, hat zunächst *nur* die Eigenschaft, *mit sich selbst multiplicirbar zu sein und dabei das Product -1 zu geben.*

Um die Zahl i ausgedehnter in Benutzung zu nehmen, giebt man die

Erklärung: *Die Zahl i soll den bisherigen ganzen und gebrochenen positiven und negativen Zahlen hinzugesellt werden, und in dem solchergestalt erweiterten Zahlensysteme sollen alle die vier Grundrechnungen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division betreffenden Regeln unverändert bestehen bleiben.*

Bei Ausführung der Operationen der Addition u. s. w. auf die Zahlen des vorliegenden Systems tritt eine neue Erweiterung dieses Systems ein: aus zwei Zahlen a, b der bisherigen Art und der Zahl i erzeugt man durch Multiplication und Addition die Zahl $(a + i \cdot b)$ oder kurz $(a + ib)$.

Erklärung: *Die so zu gewinnenden Zahlen $(a + ib)$ heissen „complexe Zahlen". Ist von den Zahlen a, b die letzte, b, allein $\gtrless 0$, so spricht man von einer „rein imaginären" Zahl; und man nennt i oder*

[1]) Diese Abkürzung bedeutet: „I. Capitel, Nr. 1".

XII. Capitel.

Differentiation und Integration der Functionen mehrerer unabhängigen Variabelen.

XIII. Capitel.

Bestimmung der Maxima und Minima einer Function mehrerer Variabelen.

XIV. Capitel.

Geometrische Anwendungen der Functionen mehrerer Variabelen.

IX. Capitel.

Complexe Zahlen und Functionen complexer Variabelen.

1. Einführung der complexen Zahlen.

Die quadratische Gleichung $x^2 = -1$ kann weder durch eine positive, noch durch eine negative Zahl x, noch auch durch $x = 0$ gelöst werden.

Sagt man demnach [unter Beibehaltung des auf die in I, 1 [1]) eingeführten Zahlen bezogenen Operationszeichens der Quadratwurzelziehung], $x = \sqrt{-1}$ sei eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$, so ist in $\sqrt{-1}$ ein gegenüber I, 1 neuer Zahlbegriff geschaffen. Diese neue Zahl $\sqrt{-1}$, welche auch abgekürzt mit i bezeichnet wird, hat zunächst *nur* die Eigenschaft, *mit sich selbst multiplicirbar zu sein und dabei das Product -1 zu geben.*

Um die Zahl i ausgedehnter in Benutzung zu nehmen, giebt man die

Erklärung: *Die Zahl i soll den bisherigen ganzen und gebrochenen positiven und negativen Zahlen hinzugesellt werden, und in dem solchergestalt erweiterten Zahlensysteme sollen alle die vier Grundrechnungen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division betreffenden Regeln unverändert bestehen bleiben.*

Bei Ausführung der Operationen der Addition u. s. w. auf die Zahlen des vorliegenden Systems tritt eine neue Erweiterung dieses Systems ein: aus zwei Zahlen a, b der bisherigen Art und der Zahl i erzeugt man durch Multiplication und Addition die Zahl $(a + i \cdot b)$ oder kurz $(a + ib)$.

Erklärung: *Die so zu gewinnenden Zahlen $(a + ib)$ heissen „complexe Zahlen". Ist von den Zahlen a, b die letzte, b, allein $\gtrless 0$, so spricht man von einer „rein imaginären" Zahl; und man nennt i oder*

[1]) Diese Abkürzung bedeutet: „I. Capitel, Nr. 1".

$+i$ *die „positive", $-1 \cdot i$ oder $-i$ die „negative imaginäre Einheit". Ist $b = 0$, liegt also eine Zahl der bisher allein betrachteten Art vor, so spricht man von einer „reellen Zahl". Im Anschluss hieran heisst a der „reelle", ib der „imaginäre Bestandtheil" der complexen Zahl $(a + ib)$.*

Erklärung: *Die beiden complexen Zahlen $(a + ib)$ und $(a - ib)$, welche sich nur im Vorzeichen des imaginären Bestandtheils unterscheiden, heissen „einander conjugirt complex" oder kurz „conjugirt".*

Will man a und b nicht constant, sondern *variabel* denken, so schreibe man x statt a und y statt b, wobei dann x und y veränderliche Grössen im Sinne von I, 1 sind.

Es entspringt der *Begriff der „complexen variabelen Grösse"* oder kurz der *„complexen Variabelen"* $(x + iy)$.

Zur Abkürzung werden wir späterhin die complexe Variabele $(x + iy)$ durch z bezeichnen.

2. Rechnungsregeln für complexe Zahlen.

Für die Addition resp. Subtraction zweier complexen Zahlen $(a + ib)$ und $(c + id)$ findet man:

(1) . . $(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$,

und auf dieselbe Weise ergiebt sich die Formel:

(2) . . $(a - ib) \pm (c - id) = (a \pm c) - i\,(b \pm d)$.

Bei der Multiplication beachte man, dass $i^2 = -1$ ist; es ergeben sich die Formeln:

(3) . . $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$.

(4) . . $(a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i\,(ad + bc)$.

Soll $(a + ib)$ durch $(c + id)$ getheilt werden, so darf $(c + id)$ nicht mit der Zahl 0 identisch sein. Dies vorausgesetzt, findet man:

(5) $$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2};$$

und daneben reiht sich die Formel:

(6) . . . $$\frac{a - ib}{c - id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Aus diesen Rechnungen ergiebt sich der

Lehrsatz: *Die Addition, Subtraction, Multiplication und Division zweier complexen Zahlen ergiebt jeweils als Resultat wieder eine complexe Zahl.*

Ersetzt man die beiden gegebenen Zahlen zugleich durch ihre conjugirten, so geht auch die als Resultat entspringende Zahl in ihre conjugirte Zahl über.

Beide Regeln werden erhalten bleiben, wenn wir Addition, Subtraction u. s. w. wiederholt ausüben. Man gelangt so zum allgemeinen

Begriff der „*rationalen Rechnungsarten*“, welche die Potenzirung (als wiederholte Multiplication) einschliessen.

Lehrsatz: *Wendet man auf gegebene complexe Zahlen irgend welche rationale Rechnungen an, so ist das Ergebniss stets wieder eine complexe Zahl.*

Eine Gleichung, in welcher irgend welche complexe Zahlen rational verbunden erscheinen, bleibt richtig, falls man alle vorkommenden Zahlen zugleich durch ihre conjugirten ersetzt.

Als Specialfall der Formel (3) merke man an:

(7) . . . . . . $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Lehrsatz: *Das Product zweier conjugirten Zahlen ist reell und positiv.*

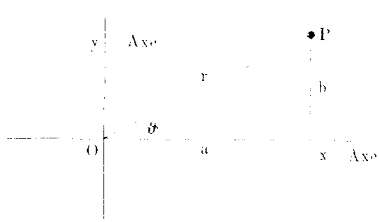
Die Ergebnisse der vorliegenden Nummer bestätigen die Brauchbarkeit der ersten in Nr. 1 abgegebenen Erklärung.

3. Geometrische Deutung der complexen Zahlen.

Zur geometrischen Deutung der complexen Zahlen legt man eine Ebene und in ihr ein rechtwinkliges Coordinatensystem fest.

Erklärung: *Der Punkt P der Ebene mit der Abscisse $x = a$ und der Ordinate $y = b$ soll der Bildpunkt oder das Bild der complexen Zahl $(a + ib)$ sein (cf. Fig. 1). Die Ebene heisse „Ebene der complexen Zahlen“ oder kurz „Zahlenebene“ (cf. I, 1).*

Fig. 1.



Die x-Axe liefert die Bildpunkte der reellen Zahlen und heisst deshalb die „*reelle Axe*“ (Zahlenlinie in I, 1). Die y-Axe besteht (abgesehen vom Nullpunkte) aus den Bildern der rein imaginären Zahlen und heisst deshalb auch „*imaginäre Axe*“.

Den Uebergang zu *Polarcoordinaten* r, ϑ (cf. V, 10) vollziehe man nach Fig. 1. Dann ist $a = r \cos \vartheta$ und $b = r \sin \vartheta$. Als „*Polardarstellung*“ der complexen Zahl $(a + ib)$ ergiebt sich so:

(1) $a + ib = r \cos \vartheta + i r \sin \vartheta = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$.

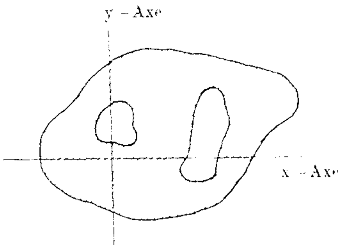
Erklärung: *Der Zahlwerth des Radius vector r des Bildpunktes P von $(a + ib)$ heisst „absoluter Betrag“ der complexen Zahl $(a + ib)$, und letzterer wird analog wie in I, 12 durch $|a + ib|$ bezeichnet:*

(2) . . . . . . $|a + ib| = r = +\sqrt{a^2 + b^2}$.

Der Winkel ϑ ist in Bogenmaass zu messen (cf. I. 7) und heisst „Amplitude" der complexen Zahl $(a + ib)$.

Eine complexe Variabele $z = x + iy$ heisst „*unbeschränkt*" oder „*beschränkt veränderlich*", je nachdem der Bildpunkt P von $(x + iy)$ in der Zahlenebene an jede Stelle gelangen kann oder nicht. Im letzteren Falle bilden die gesammten für P zugänglichen Stellen der Zahlenebene den „*Bereich der complexen Variabelen* $z = x + iy$".

Fig. 2.



Die complexe Grösse z heisst „*stetig variabel*" oder kurz „*stetig*", falls ihr Bildpunkt P in der Zahlenebene Bewegungen „im gewöhnlichen Sinne" ausführt. Eine stetige Variabele z kann demnach nie unendlich gross werden, und der Bereich einer stetigen und beschränkt veränderlichen Grösse z ist stets ein *zusammenhängendes* Stück der Zahlenebene. Als Beispiel diene das in Fig. 2 durch Schraffirung hervorgehobene Stück der Zahlenebene.

4. Geometrische Deutung der Addition und Multiplication complexer Zahlen.

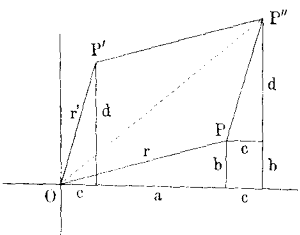
Die Formel für die Addition zweier complexen Zahlen:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

liefert in der Zahlenebene die durch Fig. 3 dargestellten Verhältnisse.

Lehrsatz: *Der Bildpunkt P'' der Summe zweier complexen Zahlen wird gewonnen, indem man die Radien vectoren $\overline{OP}$ und $\overline{OP'}$ der Summanden zieht und dieselben zum Parallelogramm ergänzt; der vierte (O gegenüberliegende) Eckpunkt dieses Parallelogramms ist P''.*

Fig. 3.



Der Grundsatz der Addition, dass der Summenwerth unabhängig von der Reihenfolge der Summanden ist, wird durch die ausgeführte Construction direct evident.

Die absoluten Beträge der Summanden und der Summe werden in Fig. 3 durch die Längen der Strecken $\overline{OP}$, $\overline{PP''}$ und $\overline{OP''}$ gegeben. Fig. 3 lehrt demnach den

Lehrsatz: *Der absolute Betrag der Summe zweier complexen Zahlen ist niemals grösser als die Summe der absoluten Beträge der Summanden:*

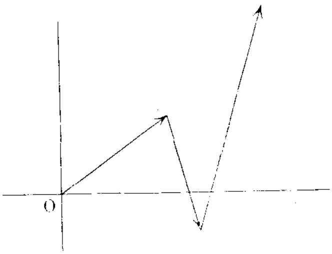
$$(2) \quad . \quad . \quad |(a+c)+i(b+d)| \leqq |a+ib|+|c+id|;$$

und das Gleichheitszeichen gilt hier nur dann, wenn die beiden Summanden gleiche Amplitude haben.

Dieser Satz überträgt sich sofort auf Summen einer beliebigen endlichen Anzahl von Summanden. —

Noch einfacher lässt sich die geometrische Deutung der Addition fassen, wenn man die einzelne complexe Zahl in der Zahlenebene durch eine solche *parallel mit sich selbst verschiebbare Strecke* versinnlicht, welche in *Richtung* und *Länge* mit dem von O nach P gerichteten Radius vector der Zahl übereinstimmt.

Fig. 4.



Die Addition wird dann einfach vollzogen, *indem man, vom Nullpunkt O beginnend, die den Summanden entsprechenden Strecken nach der „Regel der Streckenaddition in der Ebene" an einander trägt*, wie dies Fig. 4 im Falle dreier Summanden andeutet. *Der Endpunkt der letzten Strecke ist der Bildpunkt der Summe*; und es gilt der Satz, *dass dieser Punkt unabhängig von der Anordnung der Summanden ist.* —

Für die Multiplication folgert man aus (3), S. 2:

$$\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2},$$

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad |(a+ib)(c+id)| = |a+ib| \cdot |c+id|,$$

so dass der absolute Betrag des Productes zweier Factoren gleich dem Product der absoluten Beträge der Factoren ist.

Bildet man demnach unter Heranziehung der Polardarstellung (1), S. 3 den Ansatz:

$$r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \cdot r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta') = r''(\cos\vartheta'' + i\sin\vartheta''),$$

so ist $r'' = r \cdot r'$, und es restirt die Formel:

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \cdot (\cos\vartheta' + i\sin\vartheta') = \cos\vartheta'' + i\sin\vartheta'',$$

$$(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta') + i(\sin\vartheta\cos\vartheta' + \cos\vartheta\sin\vartheta') = \cos\vartheta'' + i\sin\vartheta'',$$

$$(4) \quad . \quad . \quad \cos(\vartheta+\vartheta') + i\sin(\vartheta+\vartheta') = \cos\vartheta'' + i\sin\vartheta''.$$

Nun sind zwei complexe Zahlen $(\alpha + i\beta)$ und $(\gamma + i\delta)$ nur dann einander gleich, wenn $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ ist, da sich sonst aus:

$$\alpha + i\beta = \gamma + i\delta$$

für i der *reelle* Werth $(\alpha - \gamma) : (\delta - \beta)$ berechnen würde, was doch nicht möglich ist.

Aus (4) folgt somit $\cos\vartheta'' = \cos(\vartheta + \vartheta')$, $\sin\vartheta'' = \sin(\vartheta + \vartheta')$; und also ist ϑ'', von einem Multiplum von 2π abgesehen (welches wir jedoch hier vernachlässigen dürfen), gleich $(\vartheta + \vartheta')$.

Durch Zusatz weiterer Factoren entspringt der allgemeine

Lehrsatz: *Der absolute Betrag des Productes einer endlichen Anzahl von Factoren ist gleich dem „Product" der absoluten Beträge dieser Factoren; die Amplitude des Productes ist gleich der „Summe" der Amplituden der einzelnen Factoren.*

Einen analogen Satz für die Division zweier complexen Zahlen wird man leicht aufstellen.

Die Erörterungen der beiden letzten Nummern verleihen sowohl den complexen Zahlen selbst, wie den rationalen Rechnungen mit ihnen eine concrete Bedeutung.

5. Der Moivre'sche Lehrsatz.

Der letzte Lehrsatz in Nr. 4 liefert für die n^{te} Potenz einer complexen Zahl (unter n eine ganze positive Zahl verstanden):

$$[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)]^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta).$$

Setzt man $r = 1$, so folgt:

$$(1) \quad \ldots \quad (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta.$$

Formel (1) gilt auch für $n = 0$; denn in diesem Falle haben beide Seiten in (1) den Werth 1.

Geht man zu den reciproken Werthen der linken und rechten Seite von (1) über, so ist

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^{-n} = \frac{1}{\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta};$$

und durch Umwandlung der rechten Seite vermöge (5) S. 2 folgt:

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^{-n} = \cos n\vartheta - i\sin n\vartheta.$$

Nun ist für irgend einen Winkel η stets $\cos(-\eta) = \cos\eta$ und $\sin(-\eta) = -\sin\eta$. Die letzte Formel liefert also:

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^{-n} = \cos(-n)\vartheta + i\sin(-n)\vartheta.$$

Moivre'scher Lehrsatz: *Für jede ganze positive oder negative Zahl n, sowie für $n = 0$ gilt die Gleichung:*

$$(2) \quad \ldots \quad (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta.$$

6. Radicirung complexer Zahlen, Einheitswurzeln.

Als n^{te} Wurzel aus der gegebenen complexen Zahl $r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ ist jede complexe Zahl $r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')$ zu bezeichnen, für welche die Gleichung gilt:

(1) . . . $r'^n(\cos n\vartheta' + i \sin n\vartheta') = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$.

Es ist somit r' die *eindeutig* bestimmte reelle positive Zahl $\sqrt[n]{r}$, während für ϑ' die Gleichung:

(2) . . . . $n\vartheta' = \vartheta + 2\nu\pi,\quad \vartheta' = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2\nu\pi}{n}$

mit einer *beliebig zu wählenden ganzen Zahl* ν bestehen muss.

Zwei solche Winkel ϑ', die um ein Multiplum von 2π von einander verschieden sind, liefern ein und dieselbe Zahl $r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')$. Man erhält also bereits alle n^{ten} Wurzeln aus $r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, falls man für ν nur die n Zahlen $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ einsetzt.

Lehrsatz: *Es giebt stets genau n verschiedene n^{te} Wurzeln aus einer von 0 verschiedenen complexen Zahl $r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$: diese n Wurzeln sind:*

$$(3)\quad \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\vartheta}{n} + i\sin\frac{\vartheta}{n}\right], \\ \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right], \\ \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{4\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{4\pi}{n}\right)\right], \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right]. \text{—} \end{cases}$$

Speciell für $r = 1$, $\vartheta = 0$ gilt die

Erklärung: *Eine complexe Zahl, deren n^{te} Potenz gleich $+1$ ist, heisst eine „n^{te} Wurzel der Einheit" oder kurz eine „n^{te} Einheitswurzel".*

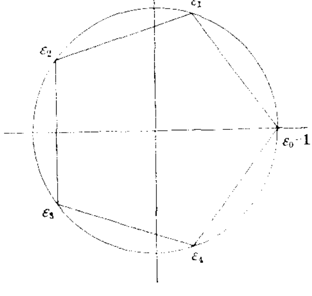
Lehrsatz: *Es giebt genau n verschiedene n^{te} Einheitswurzeln, die $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ heissen mögen; zufolge (3) ist $\varepsilon_0 = 1$ und allgemein gilt:*

(4) . . . . . . $\varepsilon_\nu = \cos\frac{2\nu\pi}{n} + i\sin\frac{2\nu\pi}{n}$,

zu bilden für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Formel (2), Nr. 5 lehrt, *dass die Einheitswurzel ε_ν als n^{te} Potenz von ε_1 dargestellt werden kann;* und der letzte Lehrsatz in Nr. 4 zeigt, *dass alle n^{ten} Wurzeln (3) aus der Zahl $r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ durch Multiplication der ersten unter ihnen der Reihe nach mit $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ gewonnen werden können.*

Fig. 5.



Die Bildpunkte der Zahlen ε_ν in der Zahlenebene liegen sämmtlich auf dem Kreise mit dem Radius 1 um den Nullpunkt, der kurz der „*Einheitskreis*“ heisse. Dabei theilen die Bildpunkte diesen Kreis in n gleiche Bogen der Grösse $\frac{2\pi}{n}$, und der Schnittpunkt des Einheitskreises mit der positiven reellen Axe liefert den ersten Theilpunkt.

Lehrsatz: *Die n Bildpunkte der n^{ten} Einheitswurzeln ε_i stellen die Ecken desjenigen dem Einheitskreise eingeschriebenen regulären n-Ecks dar, dessen erste Ecke bei $x = 1$, $y = 0$ liegt.*

Die beigefügte Figur bezieht sich auf den Fall $n = 5$ (Fig. 5 a. v. S.).

Für die niedersten Werthe n haben wir explicite:

$$(n = 2) \qquad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = -1.$$

$$(n = 3) \qquad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$(n = 4) \qquad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = i, \quad \varepsilon_2 = -1, \quad \varepsilon_3 = -i.$$

$$(n = 5) \qquad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}, \ldots$$

Allgemein nennen wir noch den

Lehrsatz: *Unter den n^{ten} Einheitswurzeln ist im Falle eines ungeraden n nur $\varepsilon_0 = 1$ reell, im Falle eines geraden n aber die beiden $\varepsilon_0 = 1$ und $\varepsilon_{\frac{n}{2}} = -1$.*

7. Unendliche Reihen mit complexen Gliedern.

Erklärung: *Es sei eine unbegrenzte Anzahl complexer Zahlen*

$$(1) \quad \ldots \quad a_1 + ib_1,\ a_2 + ib_2,\ a_3 + ib_3, \ldots$$

vorgelegt, und es existire eine endliche reelle oder complexe Zahl g von folgender Art: Nach Auswahl einer „beliebig“ kleinen reellen Zahl δ, die jedoch > 0 sein muss, soll es stets einen zu diesem δ gehörenden endlichen Index n geben, so dass für alle $m \geqq n$ der absolute Betrag $|g - a_m - ib_m| < \delta$ ist. Kann wirklich eine solche Zahl g angegeben werden, so heisst diese Zahl die „Grenze“ der Zahlenreihe (1):

$$(2) \quad \ldots \quad g = \lim_{n=\infty}(a_n + ib_n)$$

Es seien nunmehr:

$$(3) \quad w_0 = u_0 + iv_0, \quad w_1 = u_1 + iv_1, \quad w_2 = u_2 + iv_2, \ldots$$

complexe Grössen in unendlicher Anzahl.

Erklärung: *Die aus den „Gliedern“ $w_0, w_1, w_2, \ldots$ aufgebaute unendliche Reihe:*

$$(4) \quad \ldots \quad w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

heisst „convergent“, wenn die Summe S_n der n ersten Glieder:

$$(5) \quad \ldots \quad S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1}$$

für $\lim.\ n = \infty$ *einer „bestimmten endlichen" Grenze S zustrebt: ist dies nicht der Fall, so heisst die Reihe „divergent". Im ersteren Falle heisst S der „Summenwerth" oder kurz der „Werth" der Reihe.*

Unter Trennung der reellen und imaginären Bestandtheile in den einzelnen Gliedern der Reihe setze man:

(6) $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}, \quad V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}.$

Dann ist $S_n = U_n + i V_n$; und man hat im Falle der Convergenz der Reihe (4) bestimmte endliche Grenzwerthe $\lim\limits_{n=\infty} U_n$ und $\lim\limits_{n=\infty} V_n$, wie auch umgekehrt aus der Existenz derartiger Grenzen eine ebensolche Grenze $\lim\limits_{n=\infty} S_n$ folgt.

Lehrsatz: *Die Reihe (4) ist stets und nur dann convergent, wenn die beiden aus reellen Gliedern bestehenden Reihen* $(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots)$ *und* $(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots)$ *convergent sind.* —

Erklärung: *Die in (4) gegebene Reihe heisst „unbedingt convergent", falls die zugehörige Reihe der absoluten Beträge:*

(7) . . . . . . $|w_0| + |w_1| + |w_2| + |w_3| + \cdots$

convergent ist (vergl. die erste Erklärung in VII, 4).

Aus $|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$ folgt $|u_n| \leqq |w_n|$, $|v_n| \leqq |w_n|$, und also ist:

$$|u_0| + |u_1| + \cdots + |u_{n-1}| \leqq |w_0| + |w_1| + \cdots + |w_{n-1}|,$$
$$|v_0| + |v_1| + \cdots + |v_{n-1}| \leqq |w_0| + |w_1| + \cdots + |w_{n-1}|.$$

Im Falle der unbedingten Convergenz der Reihe (4) ergiebt sich hieraus auf Grund von VII, 2, Lehrsatz III, dass die beiden Reihen $(u_0 + u_1 + \cdots)$ und $(v_0 + v_1 + \cdots)$ im Sinne von VII, 4 unbedingt convergent sind und also einen von der Anordnung der Glieder unabhängigen endlichen Summenwerth haben. Letzteres gilt somit auch von der Reihe (4), da $S_n = U_n + i V_n$ ist.

Lehrsatz: *Eine unbedingt convergente Reihe aus complexen Gliedern hat einen von der Anordnung der Glieder unabhängigen bestimmten endlichen Summenwerth.* —

Ist $z = x + iy$ eine complexe Variabele, und sind $c_0 = a_0 + ib_0$, $c_1 = a_1 + ib_1, \ldots$ complexe Constanten, so setze man $w_n = c_n z^n$: die unendliche Reihe:

(8) . . . . . . $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$

heisst eine *„Potenzreihe mit complexen Gliedern"* oder kurz eine *„complexe Potenzreihe"*.

Für die zugehörige Reihe der absoluten Beträge:

(9) . . . $|c_0| + |c_1| \cdot |z| + |c_2| \cdot |z|^2 + |c_3| \cdot |z|^3 + \cdots$

existirt nach VII, 5 entweder eine endliche reelle positive Zahl g, so dass für $|z| < g$ die Reihe (9) convergent ist, während für $|z| > g$ der Werth von $|c_n| \cdot |z|^n$ mit wachsendem n über alle Grenzen wächst, oder aber die Convergenz der Reihe (9) findet für jeden endlichen Werth z statt.

Lehrsatz: *Für eine complexe Potenzreihe giebt es entweder einen mit endlichem Radius ϱ um den Nullpunkt der Zahlenebene gezogenen sogenannten „Convergenzkreis“, so dass die Reihe für die dem Inneren dieses Kreises angehörenden Werthe z unbedingt convergent ist, während sie ausserhalb stets divergirt; oder aber die unbedingte Convergenz findet für jeden endlichen Werth von z statt.*

8. Functionen einer complexen Variabelen.

Erklärung: *Sind zwei complexe Variabele $z = x + iy$ und $w = u + iv$ nach einem festen Gesetze derart an einander gebunden, dass zu dem einzelnen Werthe der „unabhängigen“ Variabelen z stets ein Werth oder irgend eine Anzahl von Werthen der „abhängigen“ Variabelen w gehört, so heisst w eine „Function“ der complexen Variabelen z.*

Die Bezeichnungsweise der Functionen durch Abkürzungen $f(z)$, $F(z)$ u. s. w., die explicite und implicite Darstellungsweise der Functionen, die Begriffe der Inversion, der Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit, sowie der Begriff der Stetigkeit der Functionen übertragen sich von den in I, 2 ff. betrachteten reellen Functionen ohne Weiteres auf die Functionen einer complexen Variabelen.

Erklärung: *Erscheint im Ausdruck der Function $f(z)$ die Variabele z mit irgend welchen complexen Constanten nur durch rationale Rechnungen verknüpft, so heisst $f(z)$ eine „rationale“ Function; kommen neben rationalen Rechnungen auch Wurzelziehungen in endlicher Anzahl vor, so nennt man $f(z)$ eine „irrationale“ Function von z.*

Lehrsatz: *Jede rationale Function $f(z)$ ist eine „eindeutige“ Function ihres Argumentes; bei der Berechnung einer irrationalen Function liefert das Ausziehen der n^{ten} Wurzel aus einem bestimmten Ausdruck stets „n verschiedene Ausdrücke“* (cf. Nr. 6).

Um die elementaren transcendenten Functionen für ein complexes Argument zu definiren, benutze man die Entwickelungen in Nr. 7.

Erklärung: *Die „Exponentialfunction“ e^z, sowie die „trigonometrischen Functionen“ $\sin z$ und $\cos z$ sollen für ein beliebiges complexes z gegeben sein durch die Summenwerthe der Potenzreihen:*

$$(1) \quad \ldots \quad e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots,$$

$$(2) \quad \ldots \quad \sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \cdots,$$

$$(3) \quad \ldots \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \cdots.$$

Infolge VII, 9 und VII, 10 sind diese Reihen für jedes endliche z unbedingt convergent.

Durch eingehendere Ueberlegungen kann man zeigen, dass eine Potenzreihe im Inneren ihres Convergenzkreises eine *stetige* Function des Argumentes z darstellt.

Lehrsatz: *Die Functionen e^z, $\cos z$, $\sin z$ sind für alle endlichen Punkte der Zahlenebene, d. i. für alle endlichen Werthe z eindeutig und stetig; und sie gehen auf der reellen Axe, d. i. für $z = x$, in die früher allein betrachteten Werthe e^x, $\sin x$, $\cos x$ über.*

Erklärung: *Die Functionen $tg\, z$ und $ctg\, z$ werden durch:*

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

für alle endlichen complexen Argumente z erklärt: und endlich werden die Functionen $\log z$, $\operatorname{arc} \sin z$, $\operatorname{arc} \cos z$, $\operatorname{arc} tg\, z$ und $\operatorname{arc} ctg\, z$ bez. als inverse Functionen von e^z, $\sin z$, $\cos z$, $tg\, z$ und $ctg\, z$ definirt.

Diese Functionen nehmen dann gleichfalls für reelle $z = x$ die von früher her bekannten Werthe $\log x$, $\operatorname{arc} \sin x$ *etc.* an.

9. Zusammenhang der Exponentialfunction mit den Functionen $\sin z$ und $\cos z$.

Aus Formel (1) Nr. 8 folgt:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1} + \frac{(iz)^2}{1 \,.\, 2} + \frac{(iz)^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \cdots$$

Da nun $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1, \ldots$ ist, und da der Werth einer unbedingt convergenten Reihe unabhängig von der Anordnung der Glieder ist, so folgt weiter:

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{1 \,.\, 2} + \frac{z^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{z^5}{1 \,.\, 2 \,.\,.\, 5} - \cdots\right).$$

Der Vergleich mit (2) und (3) Nr. 8 liefert die erste der Formeln:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z:$$

die zweite findet man auf analogem Wege.

Durch Combination der Formeln (1) findet man Ausdrücke für $\cos z$ und $\sin z$ durch die Exponentialfunction.

Lehrsatz: *Zwischen der Exponentialfunction und den trigonometrischen Functionen sin und cos besteht der durch die Formeln (1) und ihre Umkehrungen:*

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

dargestellte Zusammenhang.

Speciell sind $\cos x$ und $\sin x$ mit *reellem* Argument x durch die Exponentialfunction mit *rein imaginärem* Argument ix darstellbar.

10. Die Additionstheoreme der Functionen e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Zwei unbedingt convergente Reihen

(1) $\quad w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$ und $w'_0 + w'_1 + w'_2 + \cdots$

können mit einander multiplicirt werden und geben dabei die Reihe:

(2) . . . . $w''_0 + w''_1 + w''_2 + \cdots,$

in welcher die einzelnen Glieder die Bedeutung haben:

$w''_0 = w'_0 w_0, \quad w''_1 = w'_0 w_1 + w'_1 w_0, \quad w''_2 = w'_0 w_2 + w'_1 w_1 + w'_2 w_0, \ldots$

Durch einfache (hier nicht auszuführende) Betrachtungen zeigt man, dass auch die Reihe (2) unbedingt convergent ist und als Werth das Product der Werthe der beiden Reihen (1) besitzt.

Die Anwendung dieses Ansatzes auf die beiden Reihen:

$$e^{z_1} = 1 + \frac{z_1}{1} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \frac{z_1^4}{4!} + \cdots,$$

$$e^{z_2} = 1 + \frac{z_2}{1} + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \frac{z_2^4}{4!} + \cdots$$

ergiebt offenbar:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = 1 + \left(\frac{z_1}{1} + \frac{z_2}{1}\right) + \left(\frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1}{1} \cdot \frac{z_2}{1} + \frac{z_2^2}{2!}\right) + \cdots,$$

so dass hier w''_n allgemein die Bedeutung hat:

$$w''_n = \frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{z_2}{1} + \cdots + \frac{z_1^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{z_2^k}{k!} + \cdots + \frac{z_2^n}{n!},$$

$$w''_n = \frac{1}{n!}\left[z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \cdots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \cdots + z_2^n\right].$$

Die Anwendung des binomischen Lehrsatzes (III, 3) liefert also:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = 1 + \frac{z_1 + z_2}{1} + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} + \cdots$$

Da hier rechts die Exponentialreihe für $z = z_1 + z_2$ steht, so ergiebt sich der

Lehrsatz: *Die Exponentialfunction mit dem Argumente* $(z_1 + z_2)$ *ist gleich dem Product der Exponentialfunctionen mit den Argumenten* z_1 *und* z_2:

(3) . . . . $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

Dieser Satz heisst das „*Additionstheorem*" der Function e^z. —

Zufolge (1) Nr. 9 kann man die *Polardarstellung (1)*, S. 3, *einer complexen Zahl* folgendermaassen schreiben:

(4) . . . . $a + ib = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = re^{\vartheta i}$,

und speciell hat man für die n^{ten} *Einheitswurzeln*:

(5) $\varepsilon_0 = 1,\quad \varepsilon_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}},\quad \varepsilon_2 = e^{\frac{4\pi i}{n}}, \ldots,\quad \varepsilon_{n-1} = e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}$.

Da sich durch wiederholte Anwendung von (3) leicht $(e^z)^n = e^{nz}$ ergiebt, so findet man für $z = \vartheta i$ vermöge (1) Nr. 9 sofort den Moivre'schen Satz (1) Nr. 5 wieder. —

Indem man die linke und rechte Seite der Formel:

$$e^{\pm i(z_1 + z_2)} = e^{\pm iz_1} \cdot e^{\pm iz_2}$$

vermöge (1) Nr. 9 ausdrückt, findet sich:

$\cos(z_1 + z_2) \pm i\sin(z_1 + z_2) = (\cos z_1 \pm i\sin z_1)(\cos z_2 \pm i\sin z_2)$.

Entwickelt man die rechte Seite einmal für die oberen, sodann für die unteren Zeichen, so folgt durch Combination der beiden entspringenden Formeln der

Lehrsatz: *Für die Functionen $\sin z$ und $\cos z$ gelten die „Additionsformeln“:*

(6) . . . $\begin{cases} \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2. \end{cases}$

Für reelle Argumente kommt man auf die bekannten Additionstheoreme der Trigonometrie zurück.

11. Die Periodicität der Functionen $\sin z$, $\cos z$, e^z.

Setzt man in (6) Nr. 10 für z_2 den Werth 2π ein und berücksichtigt $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$, so folgt:

(1) . . $\sin(z + 2\pi) = \sin z, \qquad \cos(z + 2\pi) = \cos z$.

Fig. 6.

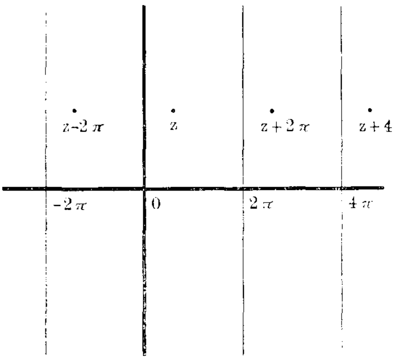
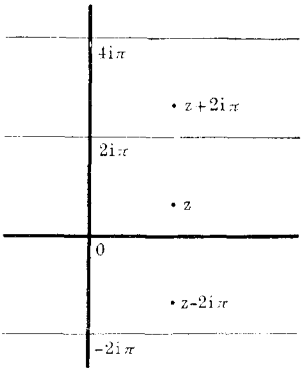


Fig. 7.



Lehrsatz: *Die Functionen $\sin z$ und $\cos z$ haben die „Periode“ 2π, d. h. die Werthe der Functionen ändern sich nicht, falls man das Argument z um 2π vermehrt oder vermindert.*

Wenn man demnach die Zahlenebene, wie Fig. 6 (a. v. S.) andeutet, durch Parallele zur *imaginären* Axe in lauter Streifen von der Breite 2π eintheilt, so werden die Functionen $sin\,z$ und $cos\,z$ für homologe Punkte der Streifen (z. B. die in der Figur markirten Punkte z, $z \pm 2\pi, \ldots$) immer wieder dieselben Werthe annehmen, wie für den ersten Punkt z. —

Ersetzt man in der Formel $e^{iz'} = cos\,z' + i\,sin\,z'$ das Argument z' durch $(z' + 2\pi)$, so folgt, dass $e^{iz'+2i\pi}$ gleich $e^{iz'}$ ist. Schreibt man hier $iz' = z$, so folgt:

(2) $\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad e^{z+2i\pi} = e^z.$

Lehrsatz: *Die Exponentialfunction e^z hat die „imaginäre Periode" $2i\pi$, d. h. der Werth der Function ändert sich nicht, falls man das Argument z um $2i\pi$ vermehrt oder vermindert.*

Wenn man demnach die Zahlenebene durch Parallele zur *reellen* Axe in lauter Streifen der Breite 2π eintheilt (cf. Fig. 7 a. v. S.), so wird die Function e^z in homologen Punkten dieser Streifen, d. i. für die zugehörigen Argumente z, stets gleiche Werthe annehmen.

Uebrigens folgt aus (1) und (2) die Gültigkeit der Gleichungen:

(3) $\quad sin(z + 2\nu\pi) = sin\,z, \quad cos(z + 2\nu\pi) = cos\,z, \quad e^{z+2\nu\pi i} = e^z$

für *jede* ganze positive oder negative Zahl ν.

12. Die Function *log z* für complexes Argument.

Ist $w = u + iv$ und setzt man $e^w = z = re^{\vartheta i}$, so gilt explicite:

$$e^{u+iv} = e^u(cos\,v + i\,sin\,v) = r(cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta).$$

Durch Trennung des Reellen und Imaginären, sowie Combination der entspringenden Gleichungen kann man folgern:

$$e^u = r, \qquad u = log\,r, \qquad v = \vartheta + 2\nu\pi,$$

wo $log\,r$ der natürliche Logarithmus von r ist, welcher nach I, 6 und II, 7 einen *eindeutig* bestimmten Werth hat, und wo ν eine *beliebig* zu wählende ganze positive oder negative Zahl oder 0 bedeutet.

Invertirt man $e^w = z$ in $w = log\,z$, so folgt:

$$log\,z = log\,r + (\vartheta + 2\nu\pi)\,i.$$

Lehrsatz: *Der natürliche Logarithmus $log\,z$ für ein beliebiges complexes Argument z ist in der Art „unendlich vieldeutig", dass der reelle Bestandtheil von $log\,z$ als $log\,r$ eindeutig bestimmt ist, während der Factor von i im imaginären Bestandtheil von $log\,z$ gleich der Amplitude ϑ von z, vermehrt um ein beliebiges Multiplum von 2π, ist.*

Die Zahl ν kann man in (1) so auswählen, dass $0 \leqq \vartheta + 2\nu\pi < 2\pi$ wird. Diese Auswahl liefert den „*Hauptwerth*" der Function $log\,z$.

Soll $log\,z$ reell sein, so muss z reell und positiv sein, und es ist der Hauptwerth zu nehmen.

Die Hauptwerthe der Logarithmen negativer reeller Argumente z sind complex, nämlich gleich $(\log r + \pi i)$.

13. Die cyklometrischen Functionen mit complexem Argument.

Den Entwickelungen in Nr. 9 entsprechend, lassen sich die cyklometrischen Functionen durch den natürlichen Logarithmus ausdrücken, und man kann demnach die Eigenschaften jener Functionen aus denen der Function *log* ableiten.

Aus (1) Nr. 9 folgt nämlich, wenn man w statt z schreibt:

$$w i = \log(\cos w + i \sin w).$$

Setzt man somit $\sin w = z$ und also $w = \arcsin z$, so folgt:

$$\arcsin z = \frac{1}{i} \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right);$$

und eine ähnliche Formel ergiebt sich für $\arccos z$.

Für $\operatorname{arctg} z$ knüpfe man an:

$$\frac{e^{wi}}{e^{-wi}} = e^{2wi} = \frac{\cos w + i \sin w}{\cos w - i \sin w} = \frac{1 + i\,\operatorname{tg} w}{1 - i\,\operatorname{tg} w}$$

und setze hier $\operatorname{tg} w = z$ und also $w = \operatorname{arctg} z$.

Lehrsatz: *Die Darstellung der Functionen $\arcsin z$ und $\operatorname{arc\,tg} z$ durch den Logarithmus wird geliefert durch:*

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \begin{cases} \arcsin z = \dfrac{1}{i} \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \\[2ex] \operatorname{arc\,tg} z = \dfrac{1}{2i} \log\left(\dfrac{1 + iz}{1 - iz}\right). \end{cases}$$

14. Differentiation und Integration der Functionen einer complexen Variabelen.

Erklärung: *Von einer complexen Grösse, welche als stetige Variabele im Sinne der ersten Erklärung in Nr. 7 bezw. im Sinne von I, 13 die Null zur Grenze hat, ohne mit 0 identisch zu werden, sagt man, sie werde unendlich klein, oder man sagt auch (in übertragener Sprechweise), sie „sei“ unendlich klein.*

Bei einer unendlich kleinen complexen Grösse ist demnach der absolute Betrag unendlich klein, während die Amplitude in keiner Weise beschränkt ist.

Benutzen wir die in Nr. 4 besprochene Deutung der complexen Zahlen durch parallel mit sich verschiebbare Strecken der Zahlenebene, welche nach *Länge* und *Richtung* fixirt sind, so würde die zu einem Differential dz gehörende Strecke eine verschwindend klein werdende Länge, aber beliebige Richtung besitzen.

Ist $f(z)$ irgend eine Function der complexen Variabelen z, so ist der dem Argumente z und dem Differential dz entsprechende Differentialquotient von $f(z)$ gegeben durch:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{df(z)}{dz} = \frac{f(z + dz) - f(z)}{dz}.$$

Hiermit ist analog wie in II, 2 der „*Grenzwerth*" der rechten Seite von (1) für den Fall gemeint, *dass bei beliebig, aber etwa fest gewählter Amplitude von dz der absolute Betrag von dz ohne Ende klein wird.*

Es gilt der merkwürdige

Lehrsatz: *Für alle oben betrachteten Functionen $f(z)$ ist der Differentialquotient eine „nur von z", aber „nicht von der Amplitude" des Differentials dz abhängende Function $f'(z)$, welche wieder als „Ableitung" bezeichnet wird.*

Es soll dies an folgenden Beispielen ausgeführt werden.

Für die Function $f(z) = z^n$ überträgt sich die am Anfange von II, 6 ausgeführte Rechnung unmittelbar und liefert $f'(z) = nz^{n-1}$ als Ableitung.

Für die transcendenten Functionen knüpfe man an die Potenzreihen. Durch eingehendere Betrachtungen lässt sich zeigen, dass man aus:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

durch gliedweises Differentiiren der rechten Seite die Potenzreihenentwickelung der Ableitung gewinnt:

$$f'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + 4c_4 z^3 + \cdots,$$

und dass diese Reihe denselben Convergenzkreis, wie die Reihe (2) besitzt:

Die Anwendung auf die in Nr. 8 angegebenen Reihen lehrt:

$$\frac{d(e^z)}{dz} = e^z, \quad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z, \quad \frac{d \cos z}{dz} = -\sin z.$$

Ueberhaupt findet man, dass alle aus II, 6 ff. bekannten Differentialformeln erhalten bleiben; und da die unbestimmte Integration nur die Inversion der Differentiation darstellt, so gilt der

Lehrsatz: *Alle in II und VI bei der Differentiation und der unbestimmten Integration unserer Functionen gewonnenen Formeln bleiben unverändert bestehen, falls an Stelle des damaligen reellen Argumentes x und Differentials dx complexe z und dz treten, sowie andererseits die etwa im Ausdruck von $f(z)$ vorkommenden constanten Coëfficienten complexe Werthe haben.*

Zu wesentlich veränderten Verhältnissen gelangt man indessen bei den *bestimmten* Integralen. An Stelle des auf der reellen Axe gelegenen Integrationsintervalles (cf. VI, 6) tritt jetzt die „*Integrationscurve*", welche die untere und obere Integralgrenze auf „irgend einem" in der Zahlenebene verlaufenden Wege verbindet.

Auf die hierdurch begründeten Complicationen wird an dieser Stelle nicht eingegangen.

X. Capitel.

Hülfssätze aus der Algebra.

1. Fundamentalsatz der Algebra nebst Anwendungen.

Es sei $f(x)$ eine rationale ganze Function des n^{ten} Grades:

$$(1)\quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

mit $n > 0$ und mit *reellen* Coëfficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$, von denen der erste $a_0 \gtrless 0$ ist [1]).

In der Algebra zeigt man den

Lehrsatz: *Die „algebraische Gleichung" $f(x) = 0$, d. i. explicite:*

$$(2)\quad .\ .\quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

besitzt jedenfalls eine reelle oder complexe Zahl $x = a$ als „Lösung" oder „Wurzel", für welche $f(a) = 0$ ist.

Dieses Theorem wird wegen seiner grundlegenden Bedeutung für die gesammte Algebra als „*Fundamentalsatz der Algebra*" bezeichnet.

Aus dem Fundamentalsatz folgert man leicht, *dass die Gleichung (2) nicht nur eine, sondern immer n Wurzeln hat.*

Bei Division der Function $f(x)$ durch $(x - a)$ möge nämlich die Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $f_1(x)$ als Quotient und die von x unabhängige Zahl r als Rest eintreten; dann gestattet $f(x)$ die nachfolgende Darstellung:

$$(3)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ f(x) = (x-a) f_1(x) + r.$$

Setzt man $x = a$, so folgt $0 = r$. und also ist:

$$(4)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ f(x) = (x-a) f_1(x).$$

Ist $n > 1$, so wende man dieselbe Betrachtung auf $f_1(x)$ an und findet $f_1(x) = (x-b) f_2(x)$, wo b eine reelle oder complexe Zahl und $f_2(x)$ eine Function $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades ist.

Die Wiederholung der gleichen Ueberlegung für $f_2(x)$ u. s. w. liefert den

[1]) Die Mehrzahl der weiteren Entwickelungen bleibt bei *complexen* Coëfficienten $a_0, \ldots$ gültig, was jedoch im Texte nicht weiter verfolgt wird.

Lehrsatz: *Die ganze Function $f(x)$ vom n^{ten} Grade lässt sich in das Product von n „Linearfactoren" zerlegen:*

(5) . . . $f(x) = a_0(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-n)$.

und hier sind $a, b, c, \ldots, n$ die n „Wurzeln" der Gleichung $f(x)=0$.

Die bei der Abtrennung des letzten Linienfactors $(x-n)$ als restirender Factor auftretende Function $f_n(x)$ ist vom nullten Grade, d. i. constant; und zwar ergiebt sich als Werth dieser Constanten a_0.

Sind die Wurzeln $a, b, \ldots, n$ theilweise (oder gar sämmtlich) einander gleich, so seien $a, b, \ldots, l$ die verschiedenen unter ihnen; und es trete $(x-a)$ in (5) im Ganzen α-mal, $(x-b)$ aber β-mal u. s. w. auf.

Lehrsatz: *Im Falle „mehrfacher" Wurzeln hat man die Linearfactorenzerlegung:*

(6) . . $f(x) = a_0(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma\ldots(x-l)^\lambda$,

wobei $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda = n$ ist.

Ist eine der Wurzeln complex, z. B. $a = a' + i a''$, so folgt aus $f(a'+ia'') = 0$ auf Grund des zweiten Lehrsatzes in IX, 2 wegen der Realität von $a_0, a_1, \ldots, a_n$ die Gleichung $f(a'-ia'') = 0$.

Lehrsatz: *Wird eine algebraische Gleichung mit reellen Coëfficienten durch die complexe Zahl $(a'+ia'')$ befriedigt, so hat sie auch die zu $(a'+ia'')$ conjugirte Zahl $(a'-ia'')$ zur Wurzel.*

Schreibt man $(x-a)^\alpha . f_1(x)$ für die rechte Seite von (6), so ist

$$f'(x) = (x-a)^{\alpha-1}[\alpha f_1(x) + (x-a)f_1'(x)];$$

und da $f_1(a) \gtrless 0$ ist, so folgt der

Lehrsatz: *Eine α-fache Wurzel von $f(x)=0$ ist eine $(\alpha-1)$-fache Wurzel der durch Differentiation zu gewinnenden Gleichung $f'(x)=0$.*

Speciell für $\alpha = 1$ folgt $f'(a) \lesseqgtr 0$.

2. Partialbruchzerlegung der rationalen Functionen.

Eine rationale Function $R(x)$ lässt sich nach I, 4 als Quotient $g(x):f(x)$ zweier ganzen Functionen $g(x)$ und $f(x)$ darstellen.

Ist der Grad n des Nenners $f(x)$ nicht grösser als der Grad m des Zählers $g(x)$, so dividire man mit $f(x)$ in $g(x)$. Es entspringt als Quotient eine ganze Function $G(x)$ des Grades $(m-n)$ und als Rest eine ganze Function $h(x)$, deren Grad $< n$ ist:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad R(x) = G(x) + \frac{h(x)}{f(x)}.$$

Man stelle nun im Anschluss an (6) Nr. 1 mit Hülfe einer gleich zu bestimmenden Constante A_1 den Quotienten $h(x):f(x)$ so dar:

$$(2) \qquad \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{h(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{h(x) - A_1 f_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)},$$

wobei der Grad des Zählers $[h(x) - A_1 f_1(x)]$ im letzten Gliede offenbar $< n$ ist.

Sind nicht gerade $f_1(x)$ und $h(x)$ zugleich vom 0^{ten} Grade, d. i. constant [1]), so können wir A_1 so wählen, dass die ganze Function $[h(x) - A_1 f_1(x)]$ den Linearfactor $(x - a)$ bekommt:

$$h(x) - A_1 f_1(x) = (x - a) \cdot h_1(x).$$

Man hat nur zu diesem Zwecke unter A_1 weiterhin den endlichen constanten Werth $h(a) : f_1(a)$ zu verstehen.

Formel (2) liefert nun:

$$(3) \qquad \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{h(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{h_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

wobei der Grad von $h_1(x)$ den von $(x - a)^{\alpha-1} f_1(x)$ nicht erreicht.

Hiermit ist eine „Recursionsformel" gewonnen, welche die successive Erniedrigung des Grades der jeweils im Nenner stehenden Function um eine Einheit erlaubt.

Die wiederholte Anwendung der Formel (3) liefert den

Lehrsatz: *Die rationale Function $R(x)$ lässt sich mit Hülfe gewisser n Constanten $A_1, \ldots, L_\lambda$ in der Gestalt darstellen:*

$$(4) \qquad \begin{aligned} R(x) = G(x) &+ \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} \\ &+ \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} + \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{L_1}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_\lambda}{x-l}, \end{aligned}$$

wobei die rechts auftretenden Nenner durch die Linearfactorenzerlegung (6) Nr. 1 des Generalnenners $f(x)$ von $R(x)$ gegeben sind.

In Formel (4) ist die sogenannte „*Partialbruchzerlegung*" der rationalen Function $R(x)$ geleistet.

3. Partialbruchzerlegung bei lauter einfachen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

Hat $f(x) = 0$ keine mehrfachen Wurzeln, so gilt der Ansatz:

$$(1) \quad . \quad . \quad \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{N}{x-n}.$$

Zur Bestimmung der Constanten $A, \ldots$ multiplicire man mit $f(x)$:

$$(2) \qquad h(x) = A \cdot \frac{f(x)}{x-a} + B \cdot \frac{f(x)}{x-b} + \cdots + N \cdot \frac{f(x)}{x-n}$$

und nehme hier $\lim. x = a$. Aus VIII, 1 folgt:

[1]) Dieser Fall subsumirt sich übrigens dem Schlussresultat unmittelbar.

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad h(a) = A \cdot \lim_{x=a} \left[\frac{f(x)}{x-a} \right] = A \cdot f'(a),$$

wobei man beachte, dass nach dem letzten Lehrsatze in Nr. 1 der Werth $f'(a) \gtrless 0$ ist.

Lehrsatz: *Hat die Gleichung $f(x) = 0$ nur einfache Wurzeln, so gilt die Partialbruchzerlegung:*

$$(4) \quad \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{h(a)}{f'(a)(x-a)} + \frac{h(b)}{f'(b)(x-b)} + \cdots + \frac{h(n)}{f'(n)(x-n)}.$$

Hieraus ergiebt sich die sogenannte „*Lagrange'sche Interpolationsformel*“:

$$(5) \quad h(x) = h(a) \cdot \frac{f(x)}{f'(a)(x-a)} + h(b) \cdot \frac{f(x)}{f'(b)(x-b)} + \cdots$$
$$\cdots + h(n) \cdot \frac{f(x)}{f'(n)(x-n)},$$

welche gestattet, eine den Grad n nicht erreichende rationale ganze Function $h(x)$ anzugeben, die für n speciell gewählte Argumente $a, b, \ldots$ vorgeschriebene Werthe $h(a)$, $h(b)$, ... hat.

Unter der (hier überall geltenden) Voraussetzung, dass $h(x)$ und $f(x)$ reelle Coëfficienten haben, kommen complexe Wurzeln von $f(x) = 0$ zufolge des vorletzten Lehrsatzes in Nr. 1 stets zu Paaren conjugirt vor. Dem einzelnen Paar conjugirter Wurzeln entsprechen alsdann conjugirt complexe Partialbrüche in (1) bez. (4).

Zufolge der Formel:

$$(6) \quad \frac{A' + iA''}{x - a' - ia''} + \frac{A' - iA''}{x - a' + ia''} = 2\,\frac{A'(x-a') - a''A''}{(x-a')^2 + a''^2}$$

lassen sich je zwei solche conjugirt complexe Partialbrüche in einen *in x quadratischen Ausdruck mit ausschliesslich reellen Coëfficienten* zusammenziehen.

XI. Capitel.

Weiterführung der Integralrechnung.

1. Integration rationaler Differentiale.

Erklärung: *Ist $R(x)$ eine beliebige rationale Function von x mit reellen Coëfficienten, so nennt man $R(x)\,dx$ ein „rationales Differential“* [1].

[1] Die Verallgemeinerung auf den Fall *complexer* Coëfficienten von $R(x)$ hat nach IX, 14 keine Schwierigkeit, wird aber hier nicht ausgeführt.

Um $\int R(x)dx$ zu bestimmen, tragen wir für $R(x)$ die Partialbruchzerlegung (4) S. 19 ein und verfahren nach VI, 3:

$$\int R(x)dx = \int G(x)dx + A_1\int\frac{dx}{(x-a)^\alpha} + \cdots + A_\alpha\int\frac{dx}{x-a}$$
$$+ \cdots + L_1\int\frac{dx}{(x-l)^\lambda} + \cdots + L_\lambda\int\frac{dx}{x-l}.$$

Jedes einzelne der rechts stehenden Integrale kann nach VI, 2 und VI, 4 berechnet werden; es folgt:

$$\int R(x)dx = G_1(x) - \frac{A_1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} - \cdots - \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + A_\alpha \cdot log(x-a)$$
$$- \cdots - \frac{L_1}{(\lambda-1)(x-l)^{\lambda-1}} - \cdots - \frac{L_{\lambda-1}}{x-l} + L_\lambda \cdot log(x-l),$$

wobei $G_1(x)$ wieder eine ganze Function ist.

Fasst man rechts alle rationalen Glieder als eine rationale Function $R_1(x)$ zusammen, so entspringt der

Lehrsatz: *Das Integral eines rationalen Differentials lässt sich in der Gestalt:*

$$(1) \quad \int R(x)dx = R_1(x) + A_\alpha log(x-a) + \cdots + L_\lambda log(x-l),$$

d. i. durch eine gleichfalls rationale Function $R_1(x)$, vermehrt um eine Summe logarithmischer Glieder, darstellen, welche letztere den unterschiedenen Linearfactoren des Generalnenners $f(x)$ von $R(x)$ entsprechen.

Bei lauter einfachen Wurzeln von $f(x) = 0$ hat man speciell:

$$(2) \int R(x)dx = G_1(x) + \frac{h(a)}{f'(a)} log(x-a) + \cdots + \frac{h(n)}{f'(n)} log(x-n).$$

Hierbei gestatten zwei conjugirt complexe Glieder unter Benutzung von IX, 13, Formel (1) folgende Zusammenziehung:

$$(3) \quad (A' + iA'')\, log(x-a'-ia'') + (A'-iA'')\, log(x-a'+ia'')$$
$$= A'\, log[(x-a')^2 + a''^2] - 2A''\, arctg\left(\frac{x-a'}{a''}\right) - \pi A''$$

in eine durchaus *reelle* Gestalt, welche übrigens, abgesehen von der Constante $\pi A''$ [1]), durch directe Integration der rechten Seite in Formel (6) voriger Nummer hätte gewonnen werden können.

Als Beispiel diene:

[1]) Man bemerke, dass in den Integralformeln des Textes vom Zusatz einer besonderen Integrationsconstante der Kürze halber abgesehen wurde.

$$R(x) = \frac{7x - 5}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{5}{6x} + \frac{9}{10(x-2)} - \frac{26}{15(x+3)}.$$

$$\int \frac{7x - 5}{x^3 + x^2 - 6x}\,dx = \frac{5}{6}\log x + \frac{9}{10}\log(x-2) - \frac{26}{15}\log(x+3).$$

2. Integration von Differentialen mit der n^{ten} Wurzel aus einer linearen Function.

Es seien a, b, c, d endliche reelle Constanten, für welche nicht gerade $ad = bc$ ist, und es sei n eine positive ganze Zahl.

Erklärung: *Unter* $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ *verstehe man eine Function, welche durch Ausübung irgend welcher „rationaler" Rechnungen auf x und die* n^{te} *Wurzel aus der linearen Function* $\frac{ax+b}{cx+d}$ *zu gewinnen ist.*

Um die Integration des zugehörigen Differentials $R\,dx$ zu leisten, substituire man nach VI, 4 eine neue Variabele y, welche mit x verknüpft ist durch:

$$(1) \quad \ldots \quad y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \qquad x = \frac{dy^n - b}{-cy^n + a}.$$

Es ergiebt sich hierbei:

$$(2) \quad \ldots \quad \begin{cases} R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) = R\left(\frac{dy^n - b}{-cy^n + a}, y\right), \\ dx = \frac{n(ad - bc)y^{n-1}}{(a - cy^n)^2}\,dy, \end{cases}$$

so dass sich $R\,dx$ in y und dy als *rationales* Differential darstellt.

Man berechne dasselbe nach Nr. 1 und führe vermöge (1) wieder x ein.

Lehrsatz: *Das Integral eines Differentials, welches rational in x und der* n^{ten} *Wurzel einer linearen Function von x aufgebaut ist:*

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

lässt sich als rationale Function dieser n^{ten} *Wurzel, vermehrt um eine Summe logarithmischer Glieder der allgemeinen Gestalt:*

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad K \log\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} - k\right)$$

darstellen, wo K und k Constanten sind.

Als Beispiel diene $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2} - 5}$. Man hat zu setzen $x - 2 = y^3$, $dx = 3y^2\,dy$ und findet:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}-5} = 3\int \frac{y^2\,dy}{y-5} = 3\int\left(y+5+\frac{25}{y-5}\right)dy.$$

Nach Berechnung des letzten Integrals und Wiedereinführung von x folgt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}-5} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x-2}\,(\sqrt[3]{x-2}+10) + 75\,log\,(\sqrt[3]{x-2}-5).$$

3. Integration von Differentialen mit der Quadratwurzel aus einer ganzen Function 2^{ten} Grades.

Es seien a, b, c reelle Constanten, deren letzte nicht verschwindet.

Erklärung: *Unter* $R\left(x, \sqrt{a+2bx+cx^2}\right)$ *wird eine Function von x verstanden, welche durch Ausübung irgend welcher „rationaler" Operationen auf* x *und* $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ *zu berechnen ist.*

Betreffs des zugehörigen Differentials $R\,dx$ gilt der

Lehrsatz: *Das Differential* $R\left(x, \sqrt{a+2bx+cx^2}\right)dx$ *lässt sich durch Substitution einer gewissen neuen Variabelen* y *auf ein in* y *„rationales Differential" transformiren.*

Um diese Transformation möglichst unter Meidung complexer Grössen durchzuführen, werden drei Fälle unterschieden.

I. Im Falle $c > 0$ führe man y ein durch:

$$(1)\quad y = x\sqrt{c} + \sqrt{a+2bx+cx^2}, \qquad 2x = \frac{y^2-a}{b+y\sqrt{c}}.$$

Man berechnet hieraus:

$$\sqrt{a+2bx+cx^2} = y - \frac{\sqrt{c}}{2}\,\frac{y^2-a}{b+y\sqrt{c}},$$

$$2\,dx = \frac{y^2\sqrt{c}+2by+a\sqrt{c}}{(b+y\sqrt{c})^2}\,dy.$$

Es sind somit x und $\sqrt{a+2bx+cx^2}$ in y rationale Functionen und dx in y ein rationales Differential; der Lehrsatz ist also in diesem Falle bewiesen.

II. Für $c < 0$ und $b^2 - ac < 0$ hat die quadratische Gleichung $a + 2bx + cx^2 = 0$ complexe Wurzeln. Es wird somit die ganze Function $(a + 2bx + cx^2)$ für kein reelles x verschwinden: und sie muss demnach, da sie für alle endlichen Werthe x stetig ist, entweder nur positive oder nur negative Werthe haben. Da aber für $x = 0$ der (wegen $c < 0$, $b^2 < ac$) negative Werth a vorliegt, so ist $(a + 2bx + cx^2)$ für *alle* reellen Argumente x negativ.

Hier sind also imaginäre Zahlen nicht zu meiden; man wird vielmehr

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = -i\sqrt{-a - 2bx - cx^2}$$
$$= -i\sqrt{a' + 2b'x + c'x^2}$$

setzen und $\sqrt{a' + 2b'x + c'x^2}$ nach der soeben in I. entwickelten Regel behandeln.

III. Trifft endlich $c < 0$ und $b^2 - ac > 0$ zu, so hat die Gleichung $a + 2bx + cx^2 = 0$ reelle Wurzeln α und $\beta > \alpha$, und man hat zu setzen $a + 2bx + cx^2 = c(x - \alpha)(x - \beta)$.

Hier bediene man sich der Substitution:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}} = y, \qquad x = \frac{\beta + \alpha y^2}{1 + y^2},$$

so dass y wenigstens für das Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ reell ist.

Man berechnet leicht:

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} = (\beta - \alpha)\sqrt{-c} \cdot \frac{y}{1 + y^2},$$
$$dx = 2(\alpha - \beta)\frac{y\,dy}{(1 + y^2)^2},$$

so dass obiger Lehrsatz auch in diesem Falle gilt.

Lehrsatz: *Ein aus x und der Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Function 2^{ten} Grades rational aufgebautes Integral:*

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int R\left(x, \sqrt{a + 2bx + cx^2}\right) dx$$

lässt sich stets durch rationale Rechnungen und Logarithmirungen aus x und $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$ berechnen.

4. Zweites Integrationsverfahren von Differentialen mit der Quadratwurzel aus einer ganzen Function 2^{ten} Grades.

Die in Nr. 3 unterschiedenen Fälle fassen wir in

$$\int R\left(x, \sqrt{a + 2bx \pm cx^2}\right) dx$$

zusammen und verstehen hier unter c eine *positive* reelle Zahl.

Ein zweites Verfahren, dieses Integral zu berechnen, besteht aus folgenden Schritten:

I. Man substituire für x die in x lineare *ganze* Function:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{cx \pm b}{\sqrt{ac \mp b^2}},$$

wodurch sich ergiebt:

$$\sqrt{c}\,\sqrt{a + 2bx \pm cx^2} = \sqrt{ac \mp b^2}\,\sqrt{1 \pm y^2}, \qquad dx = \frac{\sqrt{ac \mp b^2}}{c}\,dy.$$

Man findet somit:

$$(2) \quad \int R\left(x, \sqrt{a + 2bx \pm cx^2}\right) dx = \int R_1\left(y, \sqrt{1 \pm y^2}\right) dy.$$

wobei rechter Hand R_1 eine neue, aus y und $\sqrt{1 \pm y^2}$ vermöge rationaler Rechnungen zu gewinnende Function ist.

II. Stellt R_1 eine Summe mehrerer Glieder dar, so integrire man jedes Glied einzeln.

Jedenfalls lässt sich das einzelne Glied in die Gestalt:

$$(3) \quad \ldots \quad \frac{G_1(y) + G_2(y)\sqrt{1 \pm y^2}}{G_3(y) + G_4(y)\sqrt{1 \pm y^2}}$$

setzen, wobei $G_1(y), \ldots, G_4(y)$ ganze rationale Functionen von y sind; denn jede höhere als erste Potenz von $\sqrt{1 \pm y^2}$ ist in y entweder selbst rational oder das Product von $\sqrt{1 \pm y^2}$ und einer rationalen Function.

Durch Erweiterung des Ausdrucks (3) mit $\left(G_3 - G_4\sqrt{1 \pm y^2}\right)$ geht derselbe über in die Gestalt:

$$(4) \quad \ldots \quad \frac{G_5(y) + G_6(y)\sqrt{1 \pm y^2}}{G_7(y)} = R_2(y) + \frac{R_3(y)}{\sqrt{1 \pm y^2}},$$

wo $R_2(y)$ und $R_3(y)$ zwei neue rationale Functionen von y sind.

Das Integral $\int R\left(x, \sqrt{a + 2bx \pm cx^2}\right)dx$ lässt sich somit, abgesehen von Integralen rationaler Differentiale, reduciren auf eine Summe von Integralen der Gestalt:

$$(5) \quad \ldots \ldots \quad \int \frac{R_3(y)\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}.$$

III. Trägt man in (5) für $R_3(y)$ nach X, 2 die Partialbruchentwickelung ein und integrirt jedes Glied, *so liegt ein Aggregat von Integralen der beiden Typen vor:*

$$(6) \quad \ldots \quad \int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}, \qquad \int \frac{dy}{(y-a)^n\sqrt{1 \pm y^2}},$$

wo n eine ganze positive Zahl oder 0 bedeutet.

IV. Ist im zweiten Integral (6) $n > 0$, so setze man:

$$y - a = \frac{1}{z}, \qquad dy = -\frac{dz}{z^2},$$

worauf sich ergiebt:

$$\frac{dy}{(y-a)^n\sqrt{1 \pm y^2}} = -\frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{z^2 \pm (az+1)^2}} = -\frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{A + 2Bz \pm Cz^2}}.$$

Letzteres Differential behandle man nach I, d. i. vermöge der zu (1) analogen Substitution. Da es sich hierbei um Substitution einer *ganzen* linearen Function von z als neuer Variabelen handelt, so wird man zu Integralen des ersten Typus (6) geführt.

Es lässt sich $\int R\left(x, \sqrt{a + 2bx \pm cx^2}\right)dx$, abgesehen von Inte-

gralen rationaler Differentiale, auf ein Aggregat von Integralen des Typus $\int \frac{y^n\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}$ *reduciren.*

V. Durch partielle Integration (cf. VI, 5) folgt weiter:

$$\int \frac{y^n\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} = \pm y^{n-1} \int \frac{\pm y\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} \mp (n-1) \int \left(y^{n-2} \int \frac{\pm y\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} \right) dy,$$

$$\int \frac{y^n\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} = \pm y^{n-1} \sqrt{1 \pm y^2} \mp (n-1) \int y^{n-2} \sqrt{1 \pm y^2}\, dy.$$

Erweitert man unter dem letzten Integral mit $\sqrt{1 \pm y^2}$, so folgt:

$$\int \frac{y^n\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} = \pm y^{n-1} \sqrt{1 \pm y^2} \mp (n-1) \int \frac{y^{n-2}\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} - (n-1) \int \frac{y^n\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}.$$

Setzt man das letzte Glied nach links hinüber, so ergiebt sich eine *Recursionsformel, welche gestattet, das erste Integral (6) auf ein ebensolches mit einem um zwei Einheiten erniedrigten Exponenten n zu reduciren:*

$$(7) \quad \int \frac{y^n\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} = \pm \frac{y^{n-1}\sqrt{1 \pm y^2}}{n} \mp \frac{n-1}{n} \int \frac{y^{n-2}\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}.$$

VI. Durch wiederholte Anwendung der Formel (7) wird man auf eines der folgenden vier Integrale geführt:

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \int \frac{y\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} = \pm \sqrt{1 \pm y^2},$$

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \int \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \log\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right),$$

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \arcsin y.$$

Das Integral (8), welches soeben bereits unter V. gebraucht wurde, findet man durch die Substitution $\sqrt{1 \pm y^2} = z$, Formel (9) beweist man vermöge der unter I., S. 23, gegebenen Regel, das dritte Integral endlich ist aus VI, 2 bekannt.

Lehrsatz: *Das Integral* $\int R\left(x, \sqrt{a + 2bx \pm cx^2}\right) dx$ *lässt sich durch eine Kette von Transformationen, abgesehen von Integralen rationaler Differentiale, auf ein Aggregat von Integralen des ersten Typus (6) S. 25 reduciren. Die letzteren Integrale werden vermöge der Recursionsformel (7) auf die in (8), (9) und (10) berechneten Integrale zurückgeführt.*

Nach der hiermit dargelegten Methode sind folgende häufig vorkommende Beispiele berechnet:

$$(11)\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\,log\left(b+cx+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}\right).$$

$$(12)\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\,arc\,sin\left(\frac{cx-b}{\sqrt{b^2+ac}}\right),$$

$$(13)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}=\frac{1}{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}$$

$$-\frac{b}{c\sqrt{c}}\,log\left(b+cx+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}\right),$$

$$(14)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+2bx-cx^2}}=-\frac{1}{c}\sqrt{a+2bx-cx^2}$$

$$+\frac{b}{c\sqrt{c}}\,arc\,sin\left(\frac{cx-b}{\sqrt{b^2+ac}}\right).$$

5. Fundamentalsatz über die Integrale algebraischer Differentiale.

Erklärung: *Ist $\varphi(x)$ im Sinne von I, 10 eine elementare algebraische Function, so heisse $\varphi(x)dx$ ein „elementares algebraisches Differential".*

In den vorangehenden Nummern ist die Integration von $\varphi(x)dx$ für folgende drei Fälle durchgeführt:

$$\text{I.}\quad \varphi(x)=R(x),\quad \text{II.}\quad \varphi(x)=R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

$$\text{III.}\quad \varphi(x)=R\left(x,\sqrt{a+2bx+cx^2}\right),$$

und damit sind mittelbar auch alle diejenigen Fälle behandelt, bei denen $\varphi(x)$ additiv aus mehreren solchen Functionen aufgebaut ist.

Es gilt aber folgender fundamentale

Lehrsatz: *Die drei genannten Typen algebraischer Differentiale sind die einzigen, bei denen $f(x)=\int\varphi(x)dx$ eine „elementare" algebraische oder transcendente Function ist. Kommt in $\varphi(x)$ entweder die Quadratwurzel aus einer den zweiten Grad übersteigenden ganzen Function oder aber die höhere Wurzel aus einer nicht-linearen Function vor, so ist $f(x)$ im Allgemeinen eine der Elementarmathematik nicht bekannte „höhere" transcendente Function.*

Die den Integralen der Gestalt:

$$\int R\left(x,\sqrt{a+3bx+3cx^2+dx^3}\right)dx$$

zugehörigen sogen. „*elliptischen*" Functionen bilden die niederste Classe dieser neuen transcendenten Functionen.

6. Partielle Integration bei transcendenten Differentialen.

Erklärung: *Ist $\varphi(x)$ eine transcendente Function, so heisst $\varphi(x)dx$ ein „transcendentes" Differential.*

Bei der Integration transcendenter Differentiale verwendet man gelegentlich die partielle Integration (cf. VI, 5) mit Vortheil, wie an folgenden Beispielen gezeigt werden soll.

I. *Integration der Differentiale $sin^m x\ cos^n x\ dx$.*

Formel (3) in VI, 5 liefert:

$$\int sin^m x\ cos^n x\ dx = cos^{n-1} x \int sin^m x\ d\,sin\,x$$
$$+ (n-1)\int \left(cos^{n-2} x\ sin\,x \int sin^m x\ d\,sin\,x\right) dx.$$

$$\int sin^m x\ cos^n x\ dx = \frac{cos^{n-1} x\ sin^{m+1} x}{m+1}$$
$$+ \frac{n-1}{m+1}\int cos^{n-2} x\ sin^{m+2} x\ dx.$$

Setzt man im letzten Integral $sin^m x\,(1 - cos^2 x)$ für $sin^{m+2} x$, so folgt:

$$\int sin^m x\ cos^n x\ dx = \frac{cos^{n-1} x\ sin^{m+1} x}{m+1}$$
$$+ \frac{n-1}{m+1}\int cos^{n-2} x\ sin^m x\ dx - \frac{n-1}{m+1}\int cos^n x\ sin^m x\ dx$$

Bringt man hier das letzte Glied rechter Hand nach links, so ergiebt sich die erste der beiden folgenden Recursionsformeln:

$$(1)\ \int sin^m x\ cos^n x\ dx =$$
$$\frac{sin^{m+1} x\ cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int sin^m x\ cos^{n-2} x\ dx,$$

$$(2)\ \int sin^m x\ cos^n x\ dx =$$
$$-\frac{sin^{m-1} x\ cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int sin^{m-2} x\ cos^n x\ dx;$$

die zweite Formel beweist man analog.

Lehrsatz: *Das Integral des Differentials $sin^m x\ cos^n x\ dx$, in welchem m und n irgend welche nicht-negative ganze Zahlen sind, lässt sich vermöge der Recursionsformeln (1) und (2) auf eines der vier Integrale:*

$$\int dx = x,\quad \int cos\,x\ dx = sin\,x,\quad \int sin\,x\ dx = -\,cos\,x.$$
$$\int sin\,x\ cos\,x\ dx = {}^1\!/_2\, sin^2 x.$$

reduciren: das fragliche Integral ist demnach durch „elementare" transcendente Functionen darstellbar.

II. *Integration der Differentiale* $x^n e^x dx$ *und* $\frac{e^x}{x^n} dx$.

Die Formel der partiellen Integration ergiebt:

$$\int x^n e^x dx = x^n \int e^x dx - n \int (x^{n-1} \int e^x dx) dx.$$

$$(3) \quad \ldots \int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx.$$

Ist n von 1 verschieden, so gilt weiter:

$$\int \frac{e^x}{x^n} dx = e^x \int \frac{dx}{x^n} - \int \left(e^x \int \frac{dx}{x^n} \right) dx,$$

$$(4) \quad \ldots \int \frac{e^x}{x^n} dx = - \frac{e^x}{(n-1) x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x}{x^{n-1}} dx.$$

Lehrsatz: *Bedeutet n eine nicht-negative ganze Zahl, so lässt sich $\int x^n e^x dx$ durch die Recursionsformel (3) schliesslich auf $\int e^x dx = e^x$ reduciren: beim Integral $\int \frac{e^x}{x^n} dx$ mit positiver ganzer Zahl n gelangt man vermöge (4) schliesslich zum Integral $\int \frac{e^x}{x} dx$, welches eine „höhere" transcendente Function darstellt.*

III. *Integration der Differentiale* $x^{\pm n} \sin x\, dx$ *und* $x^{\pm n} \cos x\, dx$.

Hier liefert die partielle Integration die Recursionsformeln:

$$(5) \quad \int x^n \sin x\, dx = - x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\, dx.$$

$$(6) \quad \int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x\, dx.$$

$$(7) \quad \int \frac{\sin x}{x^n} dx = - \frac{\sin x}{(n-1) x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos x}{x^{n-1}} dx.$$

$$(8) \quad \int \frac{\cos x}{x^n} dx = - \frac{\cos x}{(n-1) x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{\sin x}{x^{n-1}} dx,$$

wobei in den beiden letzten Formeln $n > 1$ gilt.

Lehrsatz: *Die Integrale $\int x^n \sin x\, dx$ und $\int x^n \cos x\, dx$ lassen sich, falls n eine nicht-negative ganze Zahl ist, durch elementare transcendente Functionen darstellen. Die Integrale $\int \frac{\sin x}{x^n} dx$ und $\int \frac{\cos x}{x^n} dx$ mit einer ganzen Zahl $n > 0$ führen dagegen (abgesehen von elementaren transcendenten Gliedern) auf die „höheren" transcendenten Functionen $\int \frac{\sin x}{x} dx$ und $\int \frac{\cos x}{x} dx$. —*

Weitere Beispiele, bei denen man die partielle Integration mit Vortheil verwendet, sind die folgenden:

$$\int x^n \, arc \sin x \, dx, \quad \int x^n arc \, tg \, x \, dx, \quad \int x^n (\log x)^m \, dx.$$

7. Integration durch unendliche Reihen.

Die Function $\varphi(x)$ liefere die Mac Laurin'sche Entwickelung:

(1) . . . $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$

welche innerhalb des Intervalls $-g < x < +g$ convergent sei.

Durch gliedweise Integration der auf der rechten Seite von (1) stehenden Reihe folgt (unter C die Integrationsconstante verstanden):

(2) . . . $C + a_0 x + a_1 \dfrac{x^2}{2} + a_2 \dfrac{x^3}{3} + a_3 \cdot \dfrac{x^4}{4} + \cdots$

Man kann zeigen (was jedoch hier nicht ausgeführt wird), *dass die Reihe (2) in demselben Intervall $-g < x < +g$ convergirt, und dass sie innerhalb dieses Intervalles den Werth von $\int \varphi(x) dx$ darstellt:*

(3) . . $\int \varphi(x) \, dx = C + a_0 x + \dfrac{a_1}{2} x^2 + \dfrac{a^2}{3} x^3 + \cdots$

Als Beispiel gelte:

(4) $\int \dfrac{\sin x}{x} dx = C + x - \dfrac{x^3}{2! \cdot 3^2} + \dfrac{x^5}{4! \cdot 5^2} - \dfrac{x^7}{6! \cdot 7^2} + \cdots,$

eine Reihe, die für alle endlichen x convergent ist.

Man besitzt in dieser Potenzreihe ein Mittel, *die Werthe neuer transcendenter Functionen, z. B. der Function $\int \dfrac{\sin x}{x} dx$, für specielle Argumente x angenähert zu berechnen.*

8. Entwickelung von $\frac{\pi}{2}$ in ein unendliches Product.

Nimmt man in (2) Nr. 6 die ganze Zahl $m > 1$ und $n = 0$, und integrirt man zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \, dx.$$

Bei wiederholter Anwendung dieser Recursionsformel kommt man, je nachdem m ungerade oder gerade ist, schliesslich auf das erste oder zweite der folgenden Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Es ergiebt sich auf diese Weise:

$$(1) \quad . \quad . \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1},$$

$$(2) \quad . \quad . \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

Da nun im Innern des ganzen Integrationsintervalls $\sin x$ einen positiven echten Bruch darstellt, so gilt für jedes ganzzahlige $m > 0$:

$$\sin^m x > \sin^{m+1} x \quad \text{und also} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+1} x \, dx,$$

wie aus der Bedeutung des bestimmten Integrals (VI, 6) hervorgeht.

Setzt man in der letzten Ungleichung erst $m = 2n - 1$ und sodann $m = 2n$, so ergeben sich aus (1) und (2) die Ungleichungen:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} > \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n},$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} > \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1}$$

oder nach leichter Umrechnung:

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}$$

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

Für $\lim. n = \infty$ nähern sich die rechten Seiten der beiden letzten Ungleichungen der gleichen Grenze. Es ist also:

$$(3) \quad . \quad . \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \right),$$

was man auch ausdrückt durch den

Lehrsatz: *Die Zahl* $\frac{\pi}{2}$ *lässt sich in das unendliche Product entwickeln:*

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdots$$

9. Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale.

Gelingt es nicht, den Werth eines bestimmten Integrals $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ durch voraufgehende Berechnung des zugehörigen unbestimmten Integrals zu ermitteln, so stehen verschiedene, auf der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals basirende Formeln zur angenäherten Berechnung des Integralwerthes zur Verfügung.

I. Man theile, wie in VI, 6, Fig. 39, das den Werth $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ repräsentirende Flächenstück durch Parallele zur y-Axe in n Streifen der gleichen Breite $h = \frac{b-a}{n}$.

Dabei mögen die zu $x = a, a+h, a+2h, \ldots, b$ gehörenden Ordinaten sich zu:

(1) $y_0 = \varphi(a),\ y_1 = \varphi(a+h),\ y_2 = \varphi(a+2h), \ldots,\ y_n = \varphi(b)$

berechnen.

Ersetzt man den Inhalt des einzelnen Streifens durch denjenigen des in Fig. 39, VI, 6, schraffirten Rechtecks, so erhält man als *erste Näherungsformel für den gesuchten Integralwerth:*

(2) . . $$\int_a^b \varphi(x)\,dx = h(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}).$$

II. Eine in der Regel grössere Annäherung an den wahren Integralwerth gewinnt man, falls man den einzelnen Streifen durch das *Trapez* ersetzt, das die betheiligten Ordinaten y_k und y_{k+1} zu Gegenseiten hat.

Dieser Annahme entspringt die *zweite Näherungsformel:*

(3) . . $$\int_a^b \varphi(x)\,dx = h(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n).$$

III. Eine dritte Näherungsformel ergiebt sich aus einer eigenthümlichen Verwendung der Parabel.

Durch die oberen Endpunkte dreier auf einander folgender Ordinaten y_k, z. B. y_0, y_1, y_2, lässt sich nur *eine* Parabel mit zur y-Axe paralleler Axe legen. Diese Parabel muss nämlich die Gleichung haben $y = px^2 + qx + r$; und wenn wir also die zu y_k gehörende Abscisse kurz x_k nennen, so müssen die drei Gleichungen bestehen:

(4) . . . . $$\begin{cases} px_0^2 + qx_0 + r = y_0, \\ px_1^2 + qx_1 + r = y_1, \\ px_2^2 + qx_2 + r = y_2, \end{cases}$$

aus welchen sich die drei Coëfficienten p, q, r *eindeutig* bestimmen.

Für gewöhnlich wird nun der zwischen den Endpunkten der Ordinaten y_0, y_2 verlaufende Bogen dieser Parabel sich daselbst der Curve $y = \varphi(x)$ enger anschliessen, als die unter II. benutzten geraden Verbindungslinien der Endpunkte von y_0, y_1, y_2.

Ersetzt man demnach bei der oberen Begrenzung der beiden ersten Streifen die Curve $y = \varphi(x)$ durch die Parabel, so wird der Inhalt dieser Streifen gegeben sein durch:

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx = {}^1\!/_3\, p\,(x_2^3 - x_0^3) + {}^1\!/_2\, q\,(x_2^2 - x_0^2) + r\,(x_2 - x_0),$$

$$= {}^1\!/_6\,(x_2 - x_0)\,[2\,p\,(x_2^2 + x_2 x_0 + x_0^2) + 3\,q\,(x_2 + x_0) + 6\,r].$$

Hier kann man $x_2 - x_0 = 2\,h$ und den in der zweiten Klammer stehenden Ausdruck auf Grund von (4) gleich $(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$ setzen, so dass sich der Inhalt der beiden ersten Streifen angenähert in der Gestalt ${}^1\!/_3\, h\,(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$ darstellt.

Zur Verwerthung dieses Ansatzes muss n gerade gewählt werden, $n = 2\,m$, und man hat die $2\,m$ Streifen zu Paaren zusammenzufassen.

Man gewinnt so als *dritte Näherungsformel:*

$$(5)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = {}^1\!/_3\, h\,[(y_0 + y_{2m}) + 2\,(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2})$$
$$+ 4\,(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1})].$$

Die hiermit gegebene Vorschrift zur angenäherten Berechnung des bestimmten Integrals heisst die „*Simpson'sche Regel*".

XII. Capitel.

Differentiation und Integration der Functionen mehrerer unabhängigen Variabelen.

1. Die Functionen zweier unabhängiger Variabelen.

Es seien x und y zwei *von einander unabhängige* reelle Veränderliche.

Erklärung: *Ist die Variabele z derart an die beiden „unabhängigen" Variabelen x und y gebunden, dass zu dem einzelnen Werthepaar x, y stets ein Werth oder irgend eine Anzahl (die Null eingeschlossen) von Werthen der „abhängigen" Variabelen z gehört, so heisst z eine „Function" der beiden unabhängigen Variabelen x und y.*

Auf diese Functionen zweier Veränderlichen überträgt man alle Begriffsbestimmungen, Bezeichnungsweisen und Eintheilungsprincipien, welche in I, 2 ff. für die Functionen einer Variabelen ausgebildet wurden.

So braucht man $z = f(x, y)$ oder $z = \varphi(x, y)$ etc. als symbolische Bezeichnungen für Functionen; man nennt z. B. $z = a x^3 + b x y - c y^5$ eine rationale ganze, $z = \sin(5x - 7y)$ eine transcendente Function von x und y u. s. w.

Um eine *geometrische Versinnlichung* der einzelnen Function $z = f(x, y)$ zu gewinnen, verstehe man unter x, y, z rechtwinklige Coordinaten im Raume.

Bei den für uns in Betracht kommenden Functionen $f(x, y)$ stellt alsdann die Gleichung $z = f(x, y)$, im Sinne der analytischen Geometrie des Raumes gedeutet, eine *Fläche* dar.

Lehrsatz: *Die bei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch $z = f(x, y)$ dargestellte Fläche benutzt man als geometrisches Bild der Function $f(x, y)$; die in den einzelnen Punkten (x, y) der xy-Ebene senkrecht errichteten Coordinaten z der Flächenpunkte liefern direct die Functionswerthe $f(x, y)$.*

2. Differentiation der Functionen $z = f(x, y)$.

Erklärung: *Falls man $z = f(x, y)$ bei constant gedachtem y (resp. x) als Function von x (resp. y) allein differentiirt, so spricht man von einer „partiellen" Differentiation von $f(x, y)$ nach x (resp. y) und nennt das Ergebniss „partielle" Ableitung (Differentialquotient) nach x (resp. y) bezw. „partielles" Differential nach x (resp. y).*

Die partielle Ableitung von $z = f(x, y)$ nach x wird durch:

$$(1) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

bezeichnet, das partielle Differential nach x aber durch:

$$(2) \quad \cdot \cdot \quad \partial_x z = \partial_x f(x, y) = f'_x(x, y)\, dx = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) dx;$$

und entsprechende Bezeichnungen braucht man für die Differentiation nach y.

So hat man z. B. für die Function $z = a x^3 + b x y - c y^5$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 a x^2 + b y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = b x - 5 c y^4.$$

Erklärung: *Falls man die beiden Variabelen x und y zugleich um die (von einander unabhängigen) Differentiale dx und dy ändert, möge die Function $z = f(x, y)$ die Aenderung dz erfahren. Man nennt alsdann dz das zu den beiden Differentialen dx und dy gehörende „totale" Differential der Function $z = f(x, y)$.*

Entspricht den endlichen Aenderungen Δx und Δy die Aenderung Δz der Function $z = f(x, y)$, so gilt:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

und also, falls man abkürzend $y + \Delta y = y_1$ setzt:

$$\Delta z = \frac{f(x + \Delta x, y_1) - f(x, y_1)}{\Delta x} \cdot \Delta x + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta y.$$

Lässt man hier Δx und Δy in die Differentiale dx und dy übergehen, so folgt für das totale Differential dz:

$$dz = \frac{\partial f(x, y_1)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy.$$

Bei den für uns in Betracht kommenden elementaren Functionen darf man nun annehmen, dass die Function $f_x'(x, y)$ für alle solche Werthepaare x, y, für welche sie endlich ist, auch stetig ist. Aus der letzten Gleichung ergiebt sich somit, da $lim.\ y_1 = y$ ist:

$$(3) \quad . \quad . \qquad dz = df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy.$$

Lehrsatz: *Das totale Differential $dz = df(x, y)$ der Function $z = f(x, y)$ ist gleich der Summe der beiden zu dx und dy gehörenden partiellen Differentiale von $z = f(x, y)$.*

Für die Function $z = ax^3 + bxy - cy^5$ hat man somit:

$$dz = (3ax^2 + by)\,dx + (bx - 5cy^4)\,dx.$$

3. Differentiation impliciter Functionen.

Wird für irgend ein Werthepaar x, y die Function $z = f(x, y) = 0$ und gestattet man fortan den Argumenten x, y nur noch solche Veränderungen, dass dauernd $z = f(x, y) = 0$ ist, so sind hierdurch x und y in gegenseitige Abhängigkeit gesetzt.

Für die Differentiale dx und dy hat dies die Folge, dass „zusammengehörende“ dx und dy stets $dz = 0$ liefern, d. i. ausführlich

$$(1) \quad . \quad . \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy = 0. \qquad \frac{dy}{dx} = - \frac{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}}.$$

Lehrsatz: *Ist y als Function von x „implicite“ durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben, so berechnet man den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ vermöge partieller Differentiationen auf Grund der zweiten Gleichung (1).*

So findet man z. B. bei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \quad \text{offenbar} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

in Uebereinstimmung mit V, 5.

4. Verallgemeinerung auf Functionen beliebig vieler Variabelen.

Ist die Anzahl n der vorliegenden unabhängigen Variabelen > 2, so bezeichnet man letztere zweckmässig durch $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Begriff und Eintheilung der Functionen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dieser n Variabelen wird man von den oben behandelten Fällen $n = 1$ und $n = 2$ aus sofort für beliebiges n verallgemeinern.

Differentiirt man die Function $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bei constant gedachten $(n-1)$ Variabelen $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ als Function von x_k allein, so gewinnt man die *„partielle Ableitung"* bezw. das *„partielle Differential"* nach x_k:

$$(1) \quad \ldots \quad \frac{\partial y}{\partial x_k}=\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_k}=f'_{x_k}(x_1,x_2\ldots,x_n),$$

$$(2) \quad \partial_{x_k} y=\partial_{x_k} f(x_1,\ldots,x_n)=f'_{x_k}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_k=\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_k}\,dx_k$$

Aendert man gleichzeitig die n Argumente um die n von einander unabhängig zu wählenden Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, so heisst die entsprechende Aenderung $dy = df(x_1, \ldots, x_n)$ der Function das zu $dx_1, \ldots, dx_n$ gehörende *„totale Differential"*.

Für dieses totale Differential gilt der

Lehrsatz: *Das zu $dx_1, \ldots, dx_n$ gehörende totale Differential dy ist gleich der Summe aller n partiellen Differentiale von $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, welche zu $dx_1, \ldots, dx_n$, einzeln genommen, gehören:*

$$(3) \quad dy=df(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Der Beweis ergiebt sich durch Verallgemeinerung der bei $n = 2$ in Nr. 2 befolgten Ueberlegung.

Setzt man $x_1 = \varphi_1(x), x_2 = \varphi_2(x), \ldots, x_n = \varphi_n(x)$ als Functionen einer einzigen Variabelen x an, so wird dadurch offenbar auch $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Function von x allein, die man als eine zusammengesetzte Function bezeichnen wird (cf. I, 11).

Hier werden dann $dx_1, \ldots, dx_n$ die zu dx gehörenden Differentiale der Functionen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Die Formel (3) liefert daraufhin den

Lehrsatz: *Ist $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ und sind $x_1 = \varphi_1(x), \ldots x_n = \varphi_n(x)$ Functionen der einen unabhängigen Variabelen x, so ist auch y eine Function von x allein, und man berechnet die Ableitung von y nach x auf Grund der Formel:*

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dx}.$$

Für $n = 1$ ergiebt sich die Regel von II, 15 wieder.

Ist z. B. $y = x_2^{x_1}$, so ergiebt sich:

$$\frac{dy}{dx} = x_1 \, . \, x_2^{x_1 - 1} \frac{dx_2}{dx} + x_2^{x_1} \log x_2 \cdot \frac{dx_1}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left[\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \cdot \varphi_2'(x) + \varphi_1'(x) \log \varphi_2(x) \right]$$

in Uebereinstimmung mit Formel (1) in II, 17.

5. Die partiellen Ableitungen höherer Ordnung.

Erklärung: *Wenn man die nach x_i genommene partielle Ableitung f'_{x_i} der Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ partiell nach x_k differentiirt, so entspringt die durch:*

$$(1) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \frac{\partial \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_k} = f''_{x_i, x_k} (x_1, x_2 \ldots, x_n)$$

zu bezeichnende „partielle zweite Ableitung“ (Ableitung zweiter Ordnung) von $f(x_1, \ldots, x_n)$ nach x_i und x_k. Entsprechend definirt man die partielle dritte Ableitung f'''_{x_i, x_k, x_l} u. s. w.

Bei einer Function $z = f(x, y)$ zweier Variabelen hat man demnach zunächst die vier partiellen zweiten Ableitungen:

$$(2) \quad \cdot \quad \cdot \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = f''_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} = f''_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$$

Bei den elementaren Functionen gilt der

Lehrsatz: *Das Ergebniss mehrerer nach einander ausgeübter Differentiationen nach verschiedenen Argumenten ist von der Reihenfolge dieser Differentiationen unabhängig.*

Um z. B. die Identität der beiden Functionen f''_{xy} und f''_{yx} zu beweisen, nehmen wir an, dass für alle hier in Betracht kommenden Werthe der Argumente f, f'_x, f'_y, f''_{xy} und f''_{yx} eindeutig und stetig sind.

Zufolge VII, 7 gilt nun, falls $F(x)$ sammt der Ableitung $F'(x)$ im Intervall von x bis $(x + h)$ eindeutig und stetig ist:

$$(3) \quad F(x + h) - F(x) = F'(x + \vartheta h) \, . \, h, \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1.$$

Man trage in Formel (3) ein:

$$F(x) = f(x, y + k) - f(x, y).$$

bei constanten y und k als Function von x allein betrachtet; und man findet auf diese Weise:

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y) \\ = [f'_x(x + \vartheta h, y + k) - f'_x(x + \vartheta h, y)] \cdot h. \end{aligned}$$

Wendet man die Regel (3), für y und k an Stelle von x und h geschrieben, auf den Ausdruck in der letzten Klammer an, so folgt:

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$
$$= f''_{xy}(x+\vartheta h, y+\vartheta' k) \,.\, hk.$$

Nun kann man aber die vorstehende Rechnung auch in der Art ausführen, dass man erst y und dann x als variabel ansieht; es findet sich so auf ganz analogem Wege für die linke Seite der letzten Gleichung:

$$f''_{yx}(x+\vartheta'' h, y+\vartheta''' k) \,.\, hk.$$

Dieserhalb muss die Gleichung bestehen:

$$f''_{xy}(x+\vartheta h, y+\vartheta' k) = f''_{yx}(x+\vartheta'' h, y+\vartheta''' k).$$

Lässt man hier h und k gleichzeitig bis 0 abnehmen, so folgt, der Behauptung entsprechend, $f''_{xy} = f''_{yx}$.

So findet man z. B. für $z = 5x^2y^3 - e^{3x+y}$ thatsächlich:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 30\, xy^2 - 3\, e^{3x+y}.$$

6. Die totalen Differentiale höherer Ordnung.

Erklärung: *Sieht man das zu dx und dy gehörige totale Differential dz einer Function $z = f(x, y)$ als Function von x und y allein an und berechnet von dieser Function dz das totale Differential für dieselben Differentiale dx und dy der Argumente, so entspringt das zu dx und dy gehörende „totale Differential zweiter Ordnung“ $d(dz) = d^2z$. Entsprechend definirt man die totalen Differentiale der 3ten, 4ten u. s. w. Ordnung d^3z, d^4z, …*

Nach dem am Schlusse von Nr. 2 aufgestellten Lehrsatze folgt:

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}\, dy.$$

Sieht man aber, der Definition von d^2z gemäss, in dem durch (3) Nr. 2 entwickelten Ausdruck von dz nur x bezw. y bei constanten dx und dy als variabel an, so ist:

$$\frac{\partial(dz)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, dy, \qquad \frac{\partial(dz)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy.$$

Unter Benutzung des letzten Lehrsatzes voriger Nummer ergiebt sich somit:

$$(1) \quad . \quad . \quad d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2.$$

Allgemein gilt der

Lehrsatz: *Das zu dx und dy gehörende totale Differential n^{ter} Ordnung der Function $z = f(x, y)$ stellt sich mit Hülfe der in III. 3 erklärten Binomialcoëfficienten der n^{ten} Potenz in der Gestalt dar:*

$$(2)\quad d^n z = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy$$
$$+ \binom{n}{2} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n.$$

Der Beweis wird durch den Schluss der „vollständigen Induction" geführt (cf. III. 4).

Ist die Formel (2) für n richtig, so berechne man nach dem Schlusssatze von Nr. 2 das Differential $d(d^n z) = d^{n+1} z$, indem man die Summe der partiellen Differentiale der rechten Seite von (2) bildet. Unter Benutzung der ersten Formel (2) in III, 3 gewinnt man die für $(n+1)$ statt n gebildete Formel (2), so dass sie auch noch für $(n+1)$ gilt. Da Formel (2) aber in (1) für $n = 2$ wirklich bewiesen ist, so gilt sie allgemein. —

Die Definition der totalen Differentiale höherer Ordnung einer Function $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n unabhängigen Variabelen $x_1, \ldots, x_n$ wird man nach Analogie des Falles $n = 2$ sofort vollziehen.

Als totales Differential 2^{ter} Ordnung merke man an:

$$(3)\quad d^2 z = d^2 f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n^2$$
$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \cdots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n.$$

7. Die Taylor'sche Reihe für Functionen mehrerer Variabelen.

Es seien u, v reelle Variabele und $f(u, v)$ eine Function derselben: dann ist:

$$d^n f = \frac{\partial^n f}{\partial u^n} du^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-1} dv} du^{n-1} dv + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial v^n} dv^n.$$

Die zunächst willkürlich zu wählenden du, dv sollen jetzt die zu dt gehörenden Differentiale der Functionen $u = x + ht$, $v = y + kt$ sein, welche letztere man bei constanten x, y, h, k in Abhängigkeit von t betrachte.

Da sich hier $du = h\,dt$, $dv = k\,dt$ berechnet, so gilt:

$$(1)\quad \frac{d^n f}{dt^n} = \frac{\partial^n f}{\partial u^n} h^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-1} \partial v} h^{n-1} k + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial v^n} k^n.$$

wobei links f als Function von t allein gilt, während rechter Hand f als Function von u und v partiell zu differentiiren ist.

Um die rechte Seite von (1) weiter umzugestalten, betrachte man allein x als variabel und differentiire f partiell nach x auf Grund der Regel der Differentiation der Function einer Function; es folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \text{weil} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

ist und v von x unabhängig ist.

Durch Fortsetzung der gleichen Ueberlegung findet man allgemein $\frac{\partial^n f(u,v)}{\partial x^{n-k}\partial y^k} = \frac{\partial^n f(u,v)}{\partial u^{n-k}\partial v^k}$, und daraufhin nimmt die Gleichung (1) die neue Gestalt an:

$$\frac{d^n f(u,v)}{dt^n} = \frac{\partial^n f(u,v)}{\partial x^n} h^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n f(u,v)}{\partial x^{n-1}\partial y} h^{n-1}k + \cdots + \frac{\partial^n f(u,v)}{\partial y^n} k^n.$$

In dieser für jeden Werth der Variabelen t geltenden Gleichung nehme man $t = 0$, wobei $u = x$ und $v = y$ wird:

$$(2)\quad \left(\frac{d^n f}{dt^n}\right)_{t=0} = \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n} h^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-1}\partial y} h^{n-1}k + \cdots + \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n} k^n,$$

eine Gleichung, auf deren linker Seite erst nach Ausführung der n-maligen Differentiation $t = 0$ zu setzen ist.

Nun entwickele man andererseits $f(u,v)$ als Function von t nach VII, 8 in die Mac Laurin'sche Reihe:

$$f(u,v) = f(x,y) + \left(\frac{df(u,v)}{dt}\right)_{t=0} \cdot \frac{t}{1} + \left(\frac{d^2 f(u,v)}{dt^2}\right)_{t=0} \cdot \frac{t^2}{1\,.\,2} + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{d^{n-1} f(u,v)}{dt^{n-1}}\right)_{t=0} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + R_n.$$

Für das Restglied R_n findet man nach Formel (2) in VII, 8:

$$R_n = \frac{t^n}{n!}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right)_{\substack{u = x + h\vartheta t \\ v = y + k\vartheta t}},$$

wo ϑ eine dem Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ angehörende Zahl ist.

Hier ersetze man die einzelnen Klammerausdrücke rechter Hand durch ihre in (2) berechneten Werthe, trage aber sodann $t = 1$ ein:

$$(3)\quad f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} k\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\partial^{n-1} f(x,y)}{\partial x^{n-1}} h^{n-1} + \binom{n-1}{1}\frac{\partial^{n-1} f(x,y)}{\partial x^{n-2}\partial y} h^{n-2}k + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + \frac{\partial^{n-1} f(x,y)}{\partial y^{n-1}} k^{n-1}\right] + R_n.$$

Die Gültigkeitsbedingungen dieses Ergebnisses folgen aus denen der in Benutzung genommenen Mac Laurin'schen Reihe für $f(u,v)$, sowie denjenigen, welche den Entwickelungen der voraufgehenden Nummern zu Grunde liegen.

Lehrsatz: *Ist die Function $f(x,y)$ sammt ihren partiellen Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung inclusive für alle hier in Betracht kommenden Werthsysteme der Argumente x und y eindeutig und stetig, so lässt sich $f(x+h, y+k)$ in Gestalt der durch (3) gegebenen „Taylor'schen Reihe“ nach Potenzen von h und k entwickeln.*

Das Restglied R_n ist direct gleich der rechten Seite der Formel (2), nur dass in den fertig berechneten partiellen n^{ten} Ableitungen die Argumente x, y zu ersetzen sind durch $x + \vartheta h$, $y + \vartheta k$.

Die Uebertragung der vorstehenden Entwickelung auf den Fall einer Function von mehr als zwei Variabelen vollzieht sich ohne Schwierigkeit. Als Anfangsglieder hat man dann:

$$(4)\quad f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right) + \frac{1}{1\,.\,2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} h_n^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \cdots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} h_{n-1} h_n\right) + \cdots$$

Hier gelten überall da, wo die Function f ohne Argumente geschrieben ist, $x_1, \ldots, x_n$ als solche.

Den Uebergang zur „*Mac Laurin'schen Reihe*" für Functionen mehrerer Variabelen vollziehe man von (3) [und entsprechend von (4)] aus, indem man $x = y = 0$ setzt, hernach aber statt h und k wieder x und y schreibt.

8. Integration zweigliedriger totaler Differentialausdrücke.

Erklärung: *Sind $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ zwei Functionen der von einander unabhängigen Variabelen x und y, so bezeichnet man:*

$$\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy$$

im Anschluss an Nr. 2 stets dann als ein „totales Differential" oder einen „totalen (vollständigen) Differentialausdruck", falls eine Function $z = f(x, y)$ existirt, für welche:

$$(1)\quad . \;\; . \;\; . \quad dz = df(x, y) = \varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy$$

zutrifft. Diese Function $f(x, y)$ heisst alsdann ein „Integral" des Differentials $(\varphi\, dx + \psi\, dy)$.

Aus (1) würde sich vermöge (3) Nr. 2, sowie Nr. 5 ergeben:

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \psi(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Lehrsatz: *Die hier an dritter Stelle gewonnene Bedingung:*

$$(2)\quad . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}$$

ist nun nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend dafür, dass $(\varphi\, dx + \psi\, dy)$ ein vollständiges Differential ist.

In der That gelingt unter der Bedingung (2) die Angabe eines Integrals $f(x, y)$ auf folgendem Wege.

Da $\frac{\partial f}{\partial x}$ gleich $\varphi(x, y)$ sein soll, so folgt, wenn man φ bei constant gedachtem y nach x integrirt:

$$(3)\quad . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \quad f(x, y) = \int \varphi\, dx + \chi(y).$$

An Stelle der „Integrationsconstanten“ ist hier die von y allein abhängende Function $\chi(y)$ zu setzen, da von derselben nur Unabhängigkeit von der „Integrationsvariabelen“ x, aber nicht von y zu fordern ist.

Es fragt sich nun, ob man $\chi(y)$ so bestimmen kann, dass die durch (3) gegebene Function $f(x, y)$ das gewünschte Integral ist. Hierzu ist hinreichend und nothwendig, dass $\frac{\partial f}{\partial y}$ mit der gegebenen Function $\psi(x, y)$ identisch ist:

$$(4)\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \psi = \frac{\partial}{\partial y}\int \varphi\, dx + \frac{d\,\chi(y)}{d\,y}, \quad \frac{d\,\chi(y)}{d\,y} = \psi - \frac{\partial}{\partial y}\int \varphi\, dx.$$

Damit die letzte Gleichung möglich ist, muss auf ihrer rechten Seite eine Function von y allein stehen. Dies ist in der That der Fall; denn die Ableitung nach x des auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehenden Ausdrucks verschwindet zufolge (2):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\int \varphi\, dx = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int \varphi\, dx\right) = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0;$$

dieser Ausdruck erweist sich somit als von x unabhängig.

Der an $\chi(y)$ gestellten Bedingung genügt somit die Function

$$(5)\quad \ldots\ldots \quad \chi(y) = \int\left[\psi - \frac{\partial}{\partial y}\int \varphi\, dx\right] dy + C,$$

wo C eine von x und y unabhängige Grösse ist.

Durch Einsetzung dieses Werthes von $\chi(y)$ in Formel (3) gewinnt man als *„Integral des totalen Differentials $(\varphi\, dx + \psi\, dy)$“*:

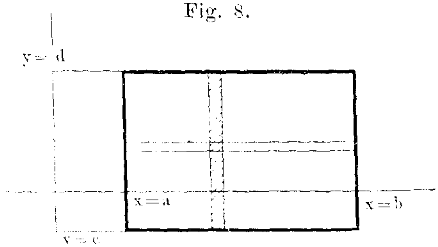
$$(6)\quad f(x, y) = \int \varphi\, dx + \int\left[\psi - \frac{\partial}{\partial y}\int \varphi\, dx\right] dy + C,$$

eine Formel, welche in der Theorie der Differentialgleichungen zur Verwendung kommt.

9. Differentiation und Integration eines bestimmten Integrals nach einem Parameter.

Man verstehe unter x, y, z rechtwinklige Raumcoordinaten und zeichne in der xy-Ebene das in Fig. 8 scharf umrandete Rechteck, dessen Seiten durch die vier Gleichungen $x = a$ und $x = b$, $y = c$ und $y = d$ dargestellt sind.

Fig. 8.



Es sei $z = \varphi(x, y)$ eine „elementare“ Function der Variabelen x, y, welche für alle vom Inneren und vom Rande des Rechtecks gelieferten Werthsysteme x, y eindeutig und stetig ist.

Das Volumen desjenigen Raumtheiles, welcher durch die vier „Ebenen" $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, durch die xy-Ebene, sowie durch die „Fläche" $z = \varphi(x, y)$ eingegrenzt wird, heisse V[1]).

Zur Bestimmung von V zerlege man das Rechteck durch zwei Systeme von Geraden, die zur x-Axe bezw. y-Axe parallel laufen, in unendlich kleine Rechtecke. Das einzelne dieser Rechtecke, dessen Flächeninhalt (cf. Fig. 8) gleich $dx\,dy$ ist, liefert für das Volumen V ein Prisma vom Rauminhalt $z\,dx\,dy$.

Man lege nun zunächst bei constantem x und dx alle unendlich kleinen Rechtecke an einander, die den in Fig. 8 schraffirten Streifen erfüllen. Letzterer liefert vom Volumen V eine Scheibe des Inhaltes:

$$\left(\int_c^d z\,dy\right)dx = \left(\int_c^d \varphi(x, y)\,dy\right)dx,$$

wobei für constantes x und dx nach y zu integriren ist.

Indem wir den auszumessenden Raum aus unendlich vielen Scheiben dieser Art aufbauen, ergiebt sich:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad V = \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x, y)\,dy\right)dx.$$

Man kann jedoch auch so verfahren, dass man den in Fig. 8 nicht schraffirten, zur x-Axe parallel laufenden Streifen zunächst aus unendlich kleinen Rechtecken aufbaut u. s. w. Für V ergiebt sich dann:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad V = \int_c^d \left(\int_a^b \varphi(x, y)\,dx\right)dy,$$

wobei für die innere Integration y als constant gilt.

Durch Gleichsetzung der beiden für V erhaltenen Werthe folgt der

Lehrsatz: *Ist $\varphi(x, y)$ eine elementare Function von x und y, welche für alle den Ungleichungen $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ genügenden Werthsysteme der Argumente x, y eindeutig und stetig ist, so gilt die Gleichung:*

$$(3) \quad \ldots \quad \int_c^d \left(\int_a^b \varphi(x, y)\,dx\right)dy = \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x, y)\,dy\right)dx. —$$

Unter Aufgabe der bisherigen geometrischen Deutung von x und y wechseln wir die Bezeichnung, indem wir p statt y schreiben, und nennen alsdann p einen in der Function φ enthaltenen sogenannten „*unbestimmten oder variabelen Parameter*".

---

[1]) Nach Analogie der in VI, 10 bei der Quadratur ebener Curven hervorgetretenen Verhältnisse sind etwa unterhalb der xy-Ebene gelegene Theile des fraglichen Volumens bei Bestimmung der Maasszahl V *negativ* zu rechnen.

An Stelle der unteren Integralgrenze c setzen wir die *Constante* p_0, während die obere Grenze $d = p$ als *unbestimmt* oder *variabel* gelte.

Die Formel (3) lautet nun:

$$(4) \quad . \quad . \quad \int_{p_0}^{p} \left(\int_{a}^{b} \varphi(x,p)\, dx \right) dp = \int_{a}^{b} \left(\int_{p_0}^{p} \varphi(x,p)\, dp \right) dx$$

und liefert den

Lehrsatz: *Ist φ eine Function von x mit dem Parameter p, so ist das zwischen den constanten Grenzen a und b genommene Integral des Differentials $\varphi\, dx$ eine Function von p allein. Um letztere nach p zwischen den Grenzen p_0 und p zu integriren, ist es erlaubt, die Integration nach p unter dem auf x bezogenen Integralzeichen an $\varphi(x,p)$ zu vollziehen.* —

Aus der zweiten Formel (3) in VI, 7 folgt, dass allgemein die Ableitung eines Integrals $\int_a^x \varphi(x)\, dx$ mit variabeler oberer Grenze x nach dieser Grenze gleich $\varphi(x)$ ist.

Durch Differentiation nach p folgt somit aus (4):

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial}{\partial p} \int_{a}^{b} \left(\int_{p_0}^{p} \varphi(x,p)\, dp \right) dx = \int_{a}^{b} \varphi(x,p)\, dx.$$

Nun schreibe man wegen der variabelen oberen Grenze p:

$$\int_{p_0}^{p} \varphi(x,p)\, dp = \psi(x,p)$$

und findet durch Differentiation nach p hieraus:

$$\varphi(x,p) = \frac{\partial \psi(x,p)}{\partial p}.$$

Ersetzt man in (5) rechts und links φ durch ψ, wechselt sodann aber wieder die Bezeichnung ψ in φ aus, so ist:

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial}{\partial p} \int_{a}^{b} \varphi(x,p)\, dx = \int_{a}^{b} \frac{\partial \varphi(x,p)}{\partial p}\, dx.$$

Lehrsatz: *Um ein bestimmtes Integral nach einem unter dem Integralzeichen vorkommenden Parameter p zu differentiiren, ist es erlaubt, die Differentiation unter dem Integralzeichen, d. h. zuerst (vor der Integration) auszuführen.*

Zusatz: *Es gilt hier überall die Annahme, dass φ sowohl in x wie in p eine „elementare" Function ist. Ueberdies setzt der Beweis voraus, dass für alle Werthepaare von Argument und Parameter, welche innerhalb a und b bezw. innerhalb p_0 und p liegen, die Function $\varphi(x,p)$*

[für Formel (4)] resp. die Function $\varphi_p''(x,p)$ [für Formel (6)] eindeutig und stetig ist.

Beispiel: Nach der in XI, 6 befolgten Methode gewinnt man vermöge zweimaliger partieller Integration:

$$\int e^{-px} \sin x \, dx = -\frac{p \sin x + \cos x}{1 + p^2} \cdot e^{-px}.$$

Ist $p > 0$, so ist es nach VI, 8 erlaubt, die Integration von $x = 0$ bis $x = \infty$ auszudehnen, da die rechte Seite für $\lim. x = \infty$ wegen des Exponentialfactors der Grenze 0 zustrebt:

$$\int_0^\infty e^{-px} \sin x \, dx = \frac{1}{1 + p^2}.$$

Durch Integration nach p folgt für $p_0 > 0$ und $p > 0$:

$$\int_0^\infty \left(\int_{p_0}^p e^{-px} dp \right) \sin x \, dx = \int_{p_0}^p \frac{dp}{1 + p^2},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-p_0 x} - e^{-px}}{x} \cdot \sin x \, dx = \operatorname{arctg} p - \operatorname{arctg} p_0,$$

wo rechts die „Hauptwerthe" der Function *arctg* gemeint sind.

Diese Formel bleibt nun, wie man leicht zeigen kann, auch für $\lim. p_0 = 0$ richtig, und man kann alsdann überdies noch zufolge VI, 8 die Integration in Bezug auf p bis zur oberen Grenze $p = \infty$ ausdehnen; es ergiebt sich dabei:

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

XIII. Capitel.

Bestimmung der Maxima und Minima einer Function mehrerer Variabelen.

1. Die Maxima und Minima einer Function $f(x, y)$.

Erklärung: *Es soll in der xy-Ebene unter der „nächsten Umgebung" oder kurz der „Umgebung" eines Punktes P der Coordinaten x, y die Fläche eines Quadrates mit dem Mittelpunkte P und mit zu den*

Axen parallelen Seiten verstanden werden, dessen Seitenlänge 2δ ist: dabei soll δ je nach Umständen grösser oder kleiner, aber stets > 0 gewählt werden. Entsprechend versteht man abstract unter der „Umgebung des Werthepaares x, y" den Inbegriff aller Werthsysteme der Variabelen, welche von den Punkten des eben genannten Quadrates geliefert werden.

Die Umgebung von x, y wird somit von allen Werthsystemen $x + h$, $y + k$ geliefert, wenn man hier h und k alle die Bedingungen:

$$(1) \quad . \quad . \quad . -\delta < h < +\delta, \qquad -\delta < k < +\delta$$

befriedigenden Werthepaare h, k durchlaufen lässt.

Wird weiterhin ausgesagt, dass „in der Umgebung" des Werthepaares x, y irgend etwas zutreffe, so ist gemeint, *dass sich eine derartige Umgebung fixiren lässt, von welcher die fragliche Aussage gilt.* —

Die Function $f(x, y)$ sei in der Umgebung des speciellen Werthsystems x, y sammt ihren hier zur Verwendung kommenden partiellen Ableitungen eindeutig und stetig.

Erklärung: *Man sagt, die Function $f(x, y)$ werde für das specielle Werthsystem x, y zu einem Maximum (Minimum), falls der zugehörige Functionswerth $f(x, y)$ grösser (kleiner) als „alle" übrigen in der Umgebung von x, y eintretenden Functionswerthe ist.*

Es muss somit die etwa durch $\varDelta$ zu bezeichnende Differenz:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varDelta = f(x + h, y + k) - f(x, y),$$

falls ein Maximum (Minimum) vorliegt, für *alle* gemäss (1) gewählten Werthepaare h, k ausser $h = k = 0$ kleiner (grösser) als 0 sein.

Nun liefert die Taylor'sche Reihe (3) in XII, 7 für $n = 3$:

$$(3) \quad \varDelta = (f'_x h + f'_y k) + {}^1/_2 (f''_{xx} h^2 + 2 f''_{xy} hk + f''_{yy} k^2) + R_3,$$

wobei R_3 aus vier die Factoren $h^3, h^2 k, h k^2, k^3$ enthaltenden Gliedern zusammengesetzt erscheint.

Werden h und k (bei constantem x, y) gleichzeitig unendlich klein von erster Ordnung, so wird die erste Klammer in (3) rechter Hand, sofern nicht f'_x und f'_y zugleich verschwinden, unendlich klein von erster Ordnung und die zweite Klammer sowie R_3 werden (unter entsprechendem Vorbehalt) unendlich klein von zweiter bezw. dritter Ordnung.

Man schliesst hieraus, dass, falls nicht f'_x und f'_y zugleich verschwinden, bei genügend klein gewähltem δ das Vorzeichen von $\varDelta$ mit dem von $(f'_x h + f'_y k)$ übereinstimmt[1]).

Nun genügen mit h und k auch $h' = -h$ und $k' = -k$ den Bedingungen (1); es ist aber $(f'_x h' + f'_y k') = -(f'_x h + f'_y k)$, so

[1]) Die Schlussweise des Textes wird man leicht ausführlicher gestalten. Ist z. B. $f'_x \gtrless 0$, so hat man für die Differenz $\varDelta$, sofern man $h \gtrless 0$ und $k = hl$ setzt, die Darstellung $\varDelta = h[f'_x + l f'_y + \eta]$, wo η eine Zahl ist, die mit h die Grenze 0 hat, u. s. w.

dass Δ nur dann in der Umgebung von x, y von einerlei Zeichen sein kann, *wenn f'_x und f'_y zugleich verschwinden.*

Trifft diese Bedingung zu, so wird das Vorzeichen von Δ in der Umgebung von x, y mit dem von:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2$$

übereinstimmen. Hier setze man $\xi = \frac{h}{k}$ und bemerke, dass selbst bei Geltung der Bedingungen (1) die reelle Variabele ξ unbeschränkt bleibt (cf. I, 1). Der Ausdruck (4) geht dann, abgesehen von dem niemals negativen Factor k^2, über in:

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad f''_{xx}\xi^2 + 2f''_{xy}\xi + f''_{yy}.$$

Ist dieser Ausdruck für *alle* reellen Werthe ξ negativ (positiv), wobei für $\xi = \infty$ (dem Werthe $k = 0$ entsprechend) das Vorzeichen durch f''_{xx} geliefert wird, so liegt wirklich ein Maximum (Minimum) vor. Dagegen ist letzteres nicht der Fall, wenn der Ausdruck (5) für reelle ξ theils positive theils negative Zahlwerthe annimmt.

Da der Ausdruck (5) eine *stetige* Function von ξ darstellt, so folgt hieraus, dass ein Maximum oder Minimum vorliegt, falls die durch Nullsetzen des Ausdruckes (5) entspringende quadratische Gleichung für ξ imaginäre Wurzeln hat, dass indess weder Maximum noch Minimum eintritt, wenn diese Gleichung reelle und verschiedene Wurzeln besitzt.

Lehrsatz: *Soll die Function $f(x, y)$ für das specielle Werthepaar x, y zu einem Maximum oder Minimum werden, so müssen die beiden Gleichungen erfüllt sein:*

$$(6) \quad \ldots \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0,$$

deren Auflösung nach x, y somit alle möglicher Weise hier in Betracht kommenden Werthepaare x, y kennen lehrt. Ist für das einzelne Paar x, y weiter:

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0,$$

so tritt ein Maximum (Minimum) der Function $f(x, y)$ ein, je nachdem $\frac{\partial^2 f}{dx^2} < 0$ oder > 0 ist. Gilt dagegen für das fragliche Paar x, y:

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{d y^2} > 0,$$

so tritt bei diesem Paar x, y weder ein Maximum noch ein Minimum ein.

Ist $f''^2_{xy} - f''_{xx}f''_{yy} = 0$, ohne dass $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ zugleich verschwinden, so erfährt der Ausdruck (5) zwar keinen Zeichenwechsel, verschwindet jedoch für einen Werth ξ. Für diesen Werth sind dann zur Zeichendiscussion von Δ die höheren Glieder der Taylor'schen Reihe heranzuziehen.

Auf letztere ist auch in dem Falle zurückzugehen, dass $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ zugleich verschwinden.

2. Geometrische Deutung der Maxima und Minima einer Function $f(x, y)$.

In XIV, 3 wird gezeigt, dass die „Tangentialebene" der durch $z = f(x, y)$ dargestellten Fläche für den Berührungspunkt von den Coordinaten x, y, z dargestellt ist durch:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \zeta - z = (\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

unter ξ, η, ζ variabele Coordinaten für die Punkte dieser Ebene verstanden.

Denkt man die z-Axe des Coordinatensystems vertical gerichtet, so liefern die Formeln (6) Nr. 1 den

Lehrsatz: *Wird die Function $z = f(x, y)$ für das Werthepaar x, y zu einem Maximum oder Minimum z, so hat die durch $z = f(x, y)$ dargestellte Fläche im Punkte x, y, z eine „horizontale" Tangentialebene $\zeta = z$.*

Man verstehe nunmehr unter X, Y, Z die Coordinaten derjenigen Punkte der Fläche, welche in nächster Nähe des in Rede stehenden Berührungspunktes x, y, z liegen. Dann hat man zu setzen:

$$(2) \qquad X = x + dx, \qquad Y = y + dy, \qquad Z = z + dz,$$

und es sind hierbei dx, dy, dz an einander gebunden durch:

$$dz = f(x + dx, y + dy) - f(x, y),$$

eine Gleichung, die sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (6) Nr. 1 vermöge der Taylor'schen Reihe entwickelt in:

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dz = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dx\,dy + f''_{yy}dy^2.$$

Schneidet man die Fläche mit einer zur Tangentialebene parallelen und ihr unendlich nahe gelegenen Ebene, so entspringt dabei eine Schnittcurve, die man als die „*Indicatrix*" des Berührungspunktes x, y, z bezeichnet.

Die Gestalt der Indicatrix in nächster Nähe des Berührungspunktes bestimmt man aus (3), indem man daselbst $dz = \varepsilon$ constant denkt und für dx, dy nach (2) die Differenzen $(X - x)$, $(Y - y)$ einträgt. Es ergiebt sich:

$$(4) \quad f''_{xx}.(X - x)^2 + 2f''_{xy}(X - x)(Y - y) + f''_{yy}(Y - y)^2 = \varepsilon.$$

eine Gleichung, die (in X, Y gedeutet) eine *Ellipse*[1]), *Hyperbel oder Parabel* darstellt, je nachdem:

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad f''^2_{xy} - f''_{xx}f''_{yy} < 0, \qquad > 0 \text{ oder } = 0 \text{ ist.}$$

[1]) Sofern man das Vorzeichen von $dz = \varepsilon$ richtig wählt.

Indem man den Begriff der Indicatrix für beliebige Punkte einer Fläche verallgemeinert, hat man folgende

Erklärung: *Der einzelne Punkt der Fläche wird als ein „elliptischer", „hyperbolischer" oder „parabolischer" (Punkt elliptischer u. s. w. Krümmung) bezeichnet, je nachdem seine Indicatrix dicht am Berührungspunkte die Gestalt einer Ellipse bezw. Hyperbel oder Parabel hat.*

Alle Punkte eines *Ellipsoids* sind elliptische Punkte, und alle Punkte eines *einschaligen Hyperboloids* sind Punkte hyperbolischer (oder sattelförmiger) Krümmung.

Die geometrische Deutung der Entwickelung in Nr. 1 läuft nun einfach hinaus auf folgenden

Lehrsatz: *Im Falle eines Maximums oder Minimums, d. h. wenn (7) Nr. 1 gilt, liegt ein „elliptischer" Punkt der Fläche vor; gilt indess die Ungleichung (8), welche weder Maximum noch Minimum zur Folge hat, so handelt es sich um einen Punkt „hyperbolischer" Krümmung.*

Auch die directe Anschauung lehrt, dass zwar ein elliptischer, aber kein hyperbolischer Punkt mit horizontaler Tangentialebene den Charakter eines „höchsten" oder „tiefsten" Punktes der Fläche hat.

3. Die Maxima und Minima einer Function von mehr als zwei Variabelen.

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von einander unabhängige reelle Variabelen.

Erklärung: *Unter der „Umgebung" des speciellen Werthsystems* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *versteht man alle etwa durch* $x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n$ *zu bezeichnenden Werthsysteme, bei denen die sämmtlichen Beträge* h_k *der Ungleichung:*

$$(1) \qquad \ldots\ldots\ldots \quad -\delta < h_k < +\delta$$

genügen; hierbei ist δ *in demselben Sinne wie in Nr. 1 gebraucht.*

Es sei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine elementare Function der n Variabelen, welche für alle in Betracht kommenden Werthsysteme der Argumente sammt ihren höheren Ableitungen, soweit diese gebraucht werden, eindeutig und stetig ist.

Erklärung: *Man sagt, die Function* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *werde für das specielle System* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *zu einem Maximum (Minimum), falls der Werth der Function für das System* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *grösser (kleiner) als für „alle" übrigen Werthsysteme in der Umgebung von* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ist.*

Im Falle eines Maximums (Minimums) wird somit die Differenz:

$$(2) \qquad \Delta = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

für *alle* in Uebereinstimmung mit (1) gewählten Werthsysteme $h_1, \ldots, h_n$ ausser $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0$ kleiner (grösser) als 0 sein müssen.

Die Verwerthung der Taylor'schen Reihe für die Discussion dieses Ansatzes vollzieht sich genau so wie im Falle $n = 2$: man gewinnt den

Lehrsatz: *Soll die Function $f(x_1, \ldots, x_n)$ für $x_1, \ldots, x_n$ zu einem Maximum oder Minimum werden, so müssen die n Gleichungen gelten:*

$$(3) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

deren Auflösung nach $x_1, \ldots, x_n$ somit die hier möglicher Weise in Betracht kommenden Werthsysteme $x_1, \ldots, x_n$ kennen lehrt. Es wird dann ein Maximum (Minimum) vorliegen, wenn:

$$(4) \quad f''_{x_1 x_1} h_1^2 + \cdots + f''_{x_n x_n} h_n^2 + 2 f''_{x_1 x_2} h_1 h_2 + \cdots + 2 f''_{x_{n-1} x_n} h_{n-1} h_n$$

für „alle" Werthsysteme der h ausser $h_1 = \cdots = h_n = 0$ kleiner (grösser) als 0 ist; und es liegt sicher kein Maximum oder Minimum vor, falls der Ausdruck (4) sowohl < 0 als > 0 werden kann.

Der Fall, dass der Ausdruck (4) zwar keinen Zeichenwechsel erfährt, aber für eines oder mehrere zulässige Werthsysteme der h verschwindet, erfordert Heranziehung der höheren Glieder der Taylor'schen Reihe, und die gleiche Maassregel ist nöthig, falls die sämmtlichen Ableitungen zweiter Ordnung von f für das fragliche Werthsystem $x_1, \ldots, x_n$ zugleich verschwinden sollten. —

Eine Weiterentwickelung soll hier nur für $n = 3$ gegeben werden, wo wir $h_1 = \xi h_3$, $h_2 = \eta h_3$ schreiben wollen, um alsdann ξ und η als „unbeschränkte" reelle Veränderliche anzusehen.

Der Ausdruck (4) geht, abgesehen von dem niemals negativen Factor h_3^2, über in:

$$(5) \quad f''_{x_1 x_1} \xi^2 + 2 f''_{x_1 x_2} \xi \eta + f''_{x_2 x_2} \eta^2 + 2 f''_{x_1 x_3} \xi + 2 f''_{x_2 x_3} \eta + f''_{x_3 x_3}$$

und stellt somit, gleich 0 gesetzt, in ξ und η eine *Curve zweiten Grades* dar.

Hat letztere keinen reellen Punkt in der $\xi\eta$-Ebene, so liegt ein Maximum oder Minimum vor; hat man hier aber mit einem reellen Kegelschnitt zu thun, so tritt weder Maximum noch Minimum ein.

Die analytische Geometrie liefert die Mittel, den Ausdruck (5) in dieser Hinsicht näher zu untersuchen.

4. Maxima und Minima bei Angabe von Nebenbedingungen.

Es sei eine Function $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ der $(n+m)$ Variabelen $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ gegeben, zwischen denen gewisse m Relationen (Nebenbedingungen) bestehen:

$$(1) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0, \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0. \end{cases}$$

Die Aufgabe, die Maxima und Minima von $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ unter diesen Bedingungen zu bestimmen, erledigen wir nur insoweit, dass wir die nun an Stelle von (3) Nr. 3 tretenden Gleichungen ansetzen.

Zu diesem Ende könnte man $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ aus (1) berechnen und in $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ eintragen. Die so zu gewinnende Function der n unabhängigen Variabelen $x_1, \ldots, x_n$ wäre dann nach Nr. 3 zu behandeln.

In vielen Fällen ist ein anderes Rechnungsverfahren zweckmässiger.

Man schreibt statt $h_1, \ldots, h_{n+m}$ Differentiale $dx_1, \ldots, dx_{n+m}$, welche so gewählt sein müssen, dass auch für die veränderten Argumente die Gleichungen (1) bestehen, d. h. dass die zugehörigen totalen Differentiale $d\varphi_1, \ldots, d\varphi_m$ (cf. XII, 4) verschwinden:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0. \end{cases}$$

Für jedes in Uebereinstimmung hiermit gewählte Werthsystem $dx_1, \ldots, dx_{n+m}$ wird nun die Gleichung:

$$(3) \quad \cdot \quad \cdot \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0$$

bestehen müssen, falls f für das specielle Werthsystem $x_1, \ldots, x_{n+m}$ zu einem Maximum oder Minimum werden soll.

Hält man an der Vorstellung fest, dass $x_1, \ldots, x_n$ unabhängig sind, und dass $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ durch Auflösung der Gleichungen (1) in $x_1, \ldots, x_n$ bestimmt sind, so werden die Differentiale $dx_1, \ldots, dx_n$ von einander unabhängig sein, und $dx_{n+1}, \ldots, dx_{n+m}$ sind durch Auflösung der Gleichungen (2) in der Gestalt:

$$(4) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \begin{cases} dx_{n+1} = \psi_{11} dx_1 + \cdots + \psi_{1n} dx_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ dx_{n+m} = \psi_{m1} dx_1 + \cdots + \psi_{mn} dx_n \end{cases}$$

mit Hülfe gewisser mn Functionen ψ der x darstellbar.

Durch Eintragung dieser Werthe in die Gleichung (3) und Anordnung nach $dx_1, \ldots, dx_n$ nimmt diese Gleichung die Gestalt an:

$$(5) \qquad \chi_1(x_1, \ldots, x_{n+m}) dx_1 + \cdots + \chi_n(x_1, \ldots, x_{n+m}) dx_n = 0.$$

Da diese Gleichung für *jedes* System der von einander *unabhängigen* $dx_1, \ldots, dx_n$ bestehen muss, so gelten die Gleichungen:

$$(6) \quad \cdot \quad \cdot \quad \chi_1(x_1, \ldots, x_{n+m}) = 0, \ \ldots, \ \chi_n(x_1, \ldots, x_{n+m}) = 0,$$

welche mit Hülfe der m Gleichungen (1) die gesuchten Werthsysteme $x_1, \ldots, x_{n+m}$ mit Maximal- oder Minimalwerth f zu berechnen gestatten.

Die letzte Entwickelung kann auch so gewandt werden:

Man ziehe von der Gleichung (3) die resp. mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ multiplicirten Gleichungen (2) ab:

$$(7)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}\right) dx_1 + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n+m}}\right) dx_{n+m} = 0$$

und bestimme die Factoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ so, dass die letzten m Klammern verschwinden. Dann aber müssen auch die in den ersten n Klammern stehenden Ausdrücke einzeln gleich 0 sein, da wir an der Vorstellung unabhängiger $dx_1, \ldots, dx_n$ festhalten können.

Das Gleichungssystem (6) erscheint somit ersetzt durch:

$$(8)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} = 0, \; \ldots, \; \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n+m}} = 0,$$

ein Ergebniss, welches man interpretiren kann durch folgenden

Lehrsatz: *Sollen die Maxima und Minima einer Function $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ bei Angabe der Nebenbedingungen (1) gefunden werden, so sehe man einstweilen von diesen Relationen ab und bilde den Ansatz zur Bestimmung der Maxima und Minima der Function:*

$$(9)\qquad F(x_1, \ldots, x_{n+m}) = f - \lambda_1 \varphi_1 - \lambda_2 \varphi_2 - \cdots - \lambda_m \varphi_m$$

unter Annahme „constanter Multiplicatoren“ λ_k und „unabhängiger“ $x_1, \ldots, x_{n+m}$. Der gewünschte Ansatz ist [in Uebereinstimmung mit (8)]:

$$(10)\qquad \cdot \;\cdot\; \cdot \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \; \ldots, \; \frac{\partial F}{\partial x_{n+m}} = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert die gesuchten Systeme $x_1, \ldots, x_{n+m}$, dargestellt in den unbestimmten Grössen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Erst nun sind diese letzteren in der Art zu fixiren, dass die fraglichen Lösungssysteme $x_1, \ldots, x_{n+m}$ die Relationen (1) erfüllen.

Diese Regel zur Bestimmung der Maxima und Minima von f heisst die „*Methode der unbestimmten Multiplicatoren*“.

XIV. Capitel.

Geometrische Anwendungen der Functionen mehrerer Variabelen.

1. Die Tangenten und Normalen einer ebenen Curve.

Die Entwickelung in XII, 7 liefert ein neues Mittel zur Aufstellung der Gleichungen der *Tangente* und *Normale* einer ebenen Curve C in einem ihrer Punkte P (cf. V, 1).

Die Curve C sei gegeben durch $f(x, y) = 0$, und es handle sich um Darstellung der Tangente und Normale im Punkte P der Coordinaten x, y auf C, wobei wie in V, 1 für die Coordinaten der Punkte der Tangente bezw. Normale die Bezeichnung ξ, η gebraucht werden soll.

Sind nun zunächst $\xi = x + h$, $\eta = y + k$ die Coordinaten irgend eines in der Ebene dem Punkte P unendlich nahe gelegenen Punktes, so liefert die Formel (3) in XII, 7, wenn wir auf $f(x, y) = 0$ Bedacht nehmen und höhere Potenzen und Producte von $(\xi - x)$ bez. $(\eta - y)$ neben den ersten vernachlässigen:

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad f(\xi, \eta) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(\eta - y).$$

Soll demnach der Punkt ξ, η auf der Tangente im Punkte P und also auf der Curve unendlich nahe bei P liegen, so ist $f(\xi, \eta) = 0$; Formel (1) liefert somit den

Lehrsatz: *Die Tangente der durch $f(x, y) = 0$ gelieferten ebenen Curve im Punkte P der Coordinaten x, y ist durch:*

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(\eta - y) = 0$$

dargestellt; für die zugehörige Normale ergiebt sich daraufhin leicht die Gleichung:

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(\xi - x) - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(\eta - y) = 0.$$

Auf Grund der in XII, 3 für die Differentiation einer impliciten Function aufgestellten Regel leitet man aus den Gleichungen (2) und (3) sofort die in V, 1 unter (1) und (2) aufgestellten Gleichungen ab.

2. Die singulären Punkte einer ebenen Curve.

Eine ebene Curve C sei wie in Nr. 1 durch $f(x, y) = 0$ dargestellt.

Erklärung: *Trifft es sich, dass für einen Punkt P der Coordinaten x, y auf C die beiden partiellen Ableitungen f'_x und f'_y zugleich verschwinden, so heisst der Punkt P ein „singulärer Punkt" der Curve C.*

Die Gleichungen (2) und (3) für Tangente und Normale von C im Punkte P werden in diesem Falle illusorisch.

Ist $\xi = x + h$, $\eta = y + k$ das Paar der Coordinaten für einen in nächster Nähe des singulären Punktes gelegenen beliebigen Punkt der Ebene, so folgt jetzt aus Formel (3) in XII, 7 bei Vernachlässigung der Potenzen und Producte höheren als zweiten Grades von $(\xi - x)$ und $(\eta - y)$:

$$(1) \quad f(\xi, \eta) = f''_{xx} \cdot (\xi - x)^2 + 2 f''_{xy} \cdot (\xi - x)(\eta - y) + f''_{yy} \cdot (\eta - y)^2.$$

Es gelte die Annahme, *dass für die Coordinaten x, y von P nicht auch noch $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ zugleich verschwinden.*

Soll alsdann der Punkt ξ, η auf C liegen, so ist:

$$(2) \qquad f''_{xx} \cdot (\xi - x)^2 + 2 f''_{xy} \cdot (\xi - x)(\eta - y) + f''_{yy} \cdot (\eta - y)^2 = 0,$$

eine Gleichung, deren linke Seite sich in das Product zweier in ξ, η *linearen* Factoren zerlegen lässt, und die dem entsprechend *die beiden durch*

$$(3) \qquad \begin{cases} (\eta - y) f''_{yy} + (\xi - x)\left(f''_{xy} + \sqrt{f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy}}\right) = 0, \\ (\eta - y) f''_{yy} + (\xi - x)\left(f''_{xy} - \sqrt{f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy}}\right) = 0 \end{cases}$$

dargestellten geraden Linien liefert.

Da der Verlauf der Curve in nächster Nähe von P durch *zwei* Geraden angegeben ist, so zieht die Curve *zweimal* durch den singulären Punkt hindurch; letzterer heisst dieserhalb ein „*zweifacher Punkt*“ oder ein „*Doppelpunkt*“ der Curve.

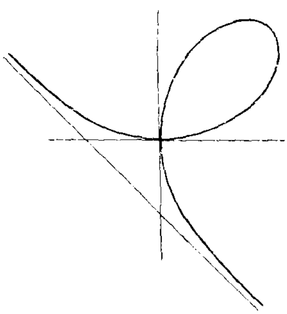
Für den geometrischen Charakter des singulären Punktes hat man zu unterscheiden, ob die in (3) eintretende Quadratwurzel reell und von 0 verschieden oder gleich 0 oder endlich imaginär ist.

Erklärung: *Je nachdem die erste, zweite oder dritte Bedingung:*

$$(4) \quad \ldots \quad f''^2_{xy} - f''_{xx} f''_{yy} > 0, \quad = 0, \quad < 0$$

zutrifft, bezeichnet man den singulären Punkt als einen „eigentlichen Doppelpunkt“ (Knotenpunkt), einen „Rückkehrpunkt“ (Spitze) oder einen „isolirten Punkt“.

Fig. 9.



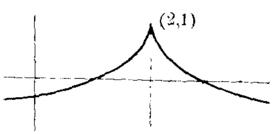
Im letzteren Falle stellen die Gleichungen (3) wegen der complexen Coëfficienten keine reelle Gerade dar; hier liegen in der Nähe des singulären Punktes keine reelle Punkte der Curve.

Den Charakter des *Knotenpunktes* versinnlicht die in Fig. 9 angedeutete Curve, welche durch die Gleichung:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

dargestellt wird; der singuläre Punkt liegt bei $x = 0$, $y = 0$, und das Paar der Tangenten in diesem Punkte wird durch die Axen des Coordinatensystems geliefert.

Fig. 10.



Einen bei $x = 2$, $y = 1$ gelegenen *Rückkehrpunkt* besitzt die durch:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^5 = 0$$

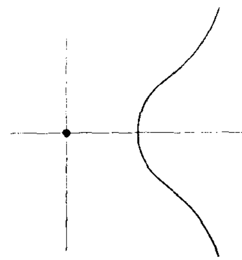
dargestellte Curve fünften Grades, deren Verlauf in Fig. 10 näher angegeben ist; für die Coordinaten des singulären Punktes ist $f''_{xx} = 1$, $f''_{xy} = f''_{yy} = 0$.

Das Beispiel eines *isolirten Punktes* liefert die durch

$$x^3 - x^2 - y^2 = 0$$

dargestellte Curve dritter Ordnung. Man hat hier $y = \pm x\sqrt{x-1}$ und erkennt im Nullpunkte einen isolirten Punkt. Die Gestalt der Curve ist in Fig. 11 angegeben.

Fig. 11.



3. Die Tangentialebenen, Tangenten und Normalen einer krummen Fläche.

Es seien x, y, z rechtwinklige Raumcoordinaten, und es werde eine krumme Fläche F durch $f(x, y, z) = 0$ dargestellt.

Es sei ferner P irgend ein Punkt auf F von den Coordinaten x, y, z, und ein beliebiger in nächster Nähe von P gelegener Punkt des Raumes habe die Coordinaten $\xi = x + h$, $\eta = y + k$, $\zeta = z + l$.

Da $f(x, y, z) = 0$ ist, so gilt in erster Annäherung:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z).$$

Soll somit der Punkt ξ, η, ζ in nächster Nähe von P auf der Fläche F gelegen sein, so muss er auf der in variabelen Coordinaten ξ, η, ζ durch:

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot(\zeta - z) = 0$$

dargestellten *Ebene* liegen.

Erklärung: *Die durch (1) in ξ. η. ζ dargestellte Ebene, welche hiernach den Verlauf der Fläche F in nächster Nähe von P angiebt, heisst die „Tangentialebene" von F mit dem Berührungspunkte P.*

Im Anschluss hieran nennen wir noch folgende

Erklärung: *Eine beliebige durch den Berührungspunkt P in der Tangentialebene laufende Gerade heisst eine „Tangente" der Fläche im Punkte P.*

Jede solche Tangente schneidet die Fläche bei P in zwei einander unendlich nahen Punkten.

Diese Betrachtung wird ungültig, wenn für den Punkt P die Ableitungen f'_x, f'_y, f'_z zugleich verschwinden; P ist dann ein „singulärer" Punkt von F, auf dessen Untersuchung wir indess nicht eingehen.

Erklärung: *Eine im Punkte P auf der Tangentialebene und also auf der Fläche F senkrecht stehende Gerade heisst „Normale" der Fläche im Punkte P.*

Auf Grund der Gleichung (1) findet man vermöge bekannter Sätze der analytischen Geometrie des Raumes den

Lehrsatz: *Die Normale der durch $f(x, y, z) = 0$ dargestellten Fläche im Punkte P der Coordinaten x, y, z hat die Gleichungen:*

$$(2) \quad \ldots \ldots \quad \frac{\xi - x}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} = \frac{\eta - y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} = \frac{\zeta - z}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}.$$

4. Die Tangenten, Normalebenen u. s. w. einer Raumcurve.

Es mögen x, y, z rechtwinklige Raumcoordinaten sein, und es sollen *zwei* krumme Flächen durch die Gleichungen gegeben sein:

$$(1) \quad \ldots \quad f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0.$$

Falls beide Flächen nicht gänzlich getrennt von einander verlaufen, so schneiden sie sich in einer sogenannten *„Raumcurve"*, *welche man als durch das Gleichungenpaar (1) dargestellt ansieht.*

Auf eine andere Art lässt sich die Raumcurve in der Weise darstellen, *dass man die Coordinaten x, y, z für die einzelnen Punkte der Curve als Functionen:*

$$(2) \quad \ldots \quad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t)$$

einer vierten, als unabhängig anzusehenden Variabelen t ansetzt. Zu jedem Punkte der Curve gehört dann ein bestimmter Werth der reellen Variabelen t.

Die Raumcurve heisse kurz C, und es seien P und P_1 zwei einander unendlich nahe gelegene Punkte auf C; P habe die Coordinaten x, y, z und P_1 entsprechend $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$.

Das zwischen P und P_1 gelegene Stück von C heisse *„Bogendifferential"* oder *„Bogenelement"* der Raumcurve und werde durch ds bezeichnet.

Die Richtungsunterschiede des von P nach P_1 gerichteten Elementes ds gegen die positiven Richtungen der Coordinatenaxen sind die *„Richtungswinkel"* α, β, γ von ds.

Die Projectionen von ds auf die Axen sind dx, dy, dz:

$$(3) \quad \ldots \quad dx = ds \,.\, \cos\alpha, \quad dy = ds \,.\, \cos\beta, \quad dz = ds \,.\, \cos\gamma.$$

Unter Benutzung bekannter Formeln der analytischen Geometrie des Raumes folgt der

Lehrsatz: *Für das Bogendifferential ds einer Raumcurve und die zugehörigen „Richtungscosinus" gelten die Ansätze:*

$$(4) \quad \ldots \ldots \quad ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$(5) \quad \ldots \quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Zur Ausführung dieser Ansätze bemerke man, dass die Punkte P und P_1 auf jeder der beiden durch die Gleichungen (1) dargestellten Flächen liegen.

Es ergiebt sich hieraus, dass die zu vorstehenden dx, dy, dz gehörenden totalen Differentiale df und dg der auf den linken Seiten der Gleichungen (1) stehenden Functionen verschwinden (cf. XII. 4):

$$(6) \quad \ldots \quad \begin{cases} f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = 0, \\ g'_x dx + g'_y dy + g'_z dz = 0. \end{cases}$$

Für die Verhältnisse der dx, dy, dz berechnet sich hieraus:

$$(7) \quad dx : dy : dz = (f'_y g'_z - f'_z g'_y) : (f'_z g'_x - f'_x g'_z) : (f'_x g'_y - f'_y g'_x).$$

Durch Einsetzung in (4) und (5) lassen sich daraufhin die Richtungscosinus des Elementes ds vermittelst der partiellen Ableitungen von f und g in den Coordinaten von P darstellen.

Bevorzugt man die Darstellung (2) von C, so mögen zu P und P_1 die Werthe t und $(t + dt)$ der unabhängigen Variabelen gehören. Die Gleichungen (2) liefern nun unmittelbar:

$$(8) \quad \ldots \quad \begin{cases} dx = \varphi'(t) dt, \quad dy = \psi'(t) dt, \quad dz = \chi'(t) d, \\ ds = \pm \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}\, dt, \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Erklärung: *Die durch P und den „consecutiven" Punkt P_1 hindurchziehende Gerade heisst „Tangente" der Raumcurve im Punkte P; die zur Tangente und also zur Curve im Punkte P senkrecht verlaufende Ebene heisst „Normalebene" der Curve C im Punkte P.*

Indem wir uns auf die soeben gemachten Angaben über Berechnung von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ berufen, haben wir den

Lehrsatz: *Die Tangente der Raumcurve C im Punkte P ist darstellbar durch:*

$$(9) \quad \ldots \quad \frac{\xi - x}{f'_y g'_z - f'_z g'_y} = \frac{\eta - y}{f'_z g'_x - f'_x g'_z} = \frac{\zeta - z}{f'_x g'_y - f'_y g'_x},$$

die Normalebene aber durch

$$(10) \quad (\xi - x)(f'_y g'_z - f'_z g'_y) + (\eta - y)(f'_z g'_x - f'_x g'_z) + (\zeta - z)(f'_x g'_y - f'_y g'_x) = 0.$$

Von der Discussion „singulärer" Punkte, für welche die auf der rechten Seite der Proportion (7) stehenden drei Glieder zugleich verschwinden, soll hier abgesehen werden.

Erklärung: *Durch „drei consecutive" Punkte P, P_1, P_2 von C lässt sich im Allgemeinen nur „eine" Ebene legen, welche man als „Schmiegungsebene" der Raumcurve im Punkte P bezeichnet. Die Schnittgerade der Schmiegungsebene und Normalebene heisst die „Hauptnormale" von C im Punkte P. Auf ihr liegt das zu P gehörende „Krümmungscentrum" der Raumcurve, d. i. das Centrum des durch P, P_1, P_2 hindurchzulegenden sogen. „Krümmungskreises".*

Es soll hier nur die Gleichung der Schmiegungsebene unter Benutzung der Darstellung (2) von C angegeben werden.

Mögen zu P, P_1, P_2 die Werthe t, $t + dt$, $t + 2dt$ der unabhängigen Variabelen gehören.

Da die Schmiegungsebene durch P hindurchläuft, so können wir ihre Gleichung mit Hülfe variabeler Coordinaten ξ, η, ζ in die Gestalt setzen:

$$(11) \quad . \quad . \quad a[\xi - \varphi(t)] + b[\eta - \psi(t)] + c[\zeta - \chi(t)] = 0.$$

Die a, b, c sind so zu bestimmen, dass (11) durch die Coordinaten ξ, η, ζ sowohl von P_1 wie P_2 befriedigt wird:

$$a[\varphi(t+dt) - \varphi(t)] + b[\psi(t+dt) - \psi(t)] \\ + c[\chi(t+dt) - \chi(t)] = 0,$$

$$a[\varphi(t+2dt) - \varphi(t)] + b[\psi(t+2dt) - \psi(t)] \\ + c[\chi(t+2dt) - \chi(t)] = 0.$$

Indem man einerseits die erste Gleichung durch dt theilt, andererseits aber die erste von der zweiten Gleichung abzieht und hernach durch dt theilt, folgt:

$$(12) \qquad \begin{cases} a\varphi'(t) + b\psi'(t) + c\chi'(t) = 0, \\ a\varphi'(t+dt) + b\psi'(t+dt) + c\chi'(t+dt) = 0. \end{cases}$$

Durch Wiederholung der letzten Operation folgt aus (12):

$$(13) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a\varphi''(t) + b\psi''(t) + c\chi''(t) = 0,$$

eine Gleichung, welche im Verein mit der ersten Gleichung (12) die Verhältnisse der a, b, c zu berechnen erlaubt.

Lehrsatz: *Die Gleichung der Schmiegungsebene der durch (2) dargestellten Raumcurve in dem zum Werthe t gehörenden Punkte P ist die folgende:*

$$(14) \quad (\xi - \varphi)(\psi'\chi'' - \psi''\chi') + (\eta - \psi)(\chi'\varphi'' - \chi''\varphi') \\ + (\zeta - \chi)(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi') = 0.$$

Hier ist bei φ, φ', ... das Argument t allenthalben der Kürze halber fortgelassen.

5. Curvenschaaren und deren einhüllende Curven.

Man denke die z-Axe der rechtwinkligen Raumcoordinaten vertical gerichtet.

Die durch $f(x, y, z) = 0$ dargestellte Fläche F werde mit der durch $z = p$ gegebenen Horizontalebene zum Schnitt gebracht.

Die Schnittcurve projicire man auf die xy-Ebene, sie ist hier durch die Gleichung $f(x, y, p) = 0$ dargestellt, welche man für jenes constante p in x und y als variabelen Coordinaten zu deuten hat.

Indem man jetzt diese Operation für alle möglichen reellen Werthe p durchgeführt denkt, gewinnt man als Projection aller „Horizontalschnitte" der Fläche F auf die xy-Ebene eine „*Schaar ebener Curven*" oder kurz eine „*Curvenschaar*". Diese Curvenschaar erscheint dargestellt durch die Gleichung:

(1) . . . . $f(x, y, p) = 0,$

in welcher man p als einen sogen. „*variabelen Parameter*“ bezeichnet.

Die Curvenschaar kann man auch direct durch die Gleichung (1) definiren; es gehört dann zu jedem reellen Werth des Parameters p die durch (1) gegebene Curve, und alle diese unendlich vielen Curven liefern die fragliche Schaar.

Wir unterscheiden nun *zwei* Arten von Curvenschaaren, *je nachdem die Fläche F vertical laufende Tangentialebenen und damit verticale Tangenten hat oder nicht.*

Ein Beispiel für den *letzteren* Fall wird geliefert durch:

(2) . . . . $x^2 + y^2 - p^2 = 0.$

Man hat es hier mit der Schaar aller concentrischen Kreise um den Nullpunkt zu thun, und die Fläche F stellt einen geraden Kreiskegel mit der z-Axe als Axe dar.

Im *ersteren* Falle besitzt die Curvenschaar eine sogen. „*einhüllende Curve*“ oder „*Enveloppe*“: es gilt nämlich folgende

Erklärung: *Die Gesammtheit der Schnittpunkte aller vertical laufenden Tangenten von F mit der xy-Ebene liefert die zur Schaar (1) gehörende einhüllende Curve (Enveloppe).*

Die einzelne dieser Tangenten schneidet F in zwei „consecutiven“ Punkten, die ihrerseits vertical über einander auf zwei „consecutiven“ Horizontalschnitten von F liegen.

Der Fusspunkt der Tangente in der xy-Ebene ist sonach Schnittpunkt zweier „consecutiven“ Curven der Schaar.

Durch Umkehrung dieser Ueberlegung entspringt der

Lehrsatz: *Man kann die Enveloppe der Schaar (1) als Inbegriff aller Punkte definiren, in denen sich je zwei consecutive Curven der Schaar (1) durchschneiden.*

Ein Punkt der Coordinaten x, y, z auf F hat nun stets und nur dann eine verticale Tangentialebene, wenn $f'_z = 0$ für diese Coordinaten erfüllt ist (cf. Formel (1) in Nr. 3).

Die Gesammtheit der Berührungspunkte mit verticaler Tangente bildet somit die durch:

(3) . . . . . $f(x, y, z) = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = 0$

dargestellte Raumcurve [1]).

Durch Elimination von z findet man die Gleichung der Projection dieser Curve auf die xy-Ebene.

Lehrsatz: *Die Gleichung der einhüllenden Curve der durch (1)*

[1]) Für die senkrechte Projection der Fläche F auf die xy-Ebene wird die fragliche Curve die sogen. „Umrisscurve“ der Fläche.

dargestellten Curvenschaar findet man durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen:

$$(4) \quad \ldots \quad f(x, y, p) = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p} = 0.$$

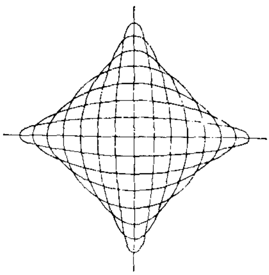
Die geometrische Bedeutung der einhüllenden Curve oder Enveloppe einer Schaar und die Berechtigung der Benennung „einhüllende Curve" werde durch folgendes Beispiel aufgewiesen.

Die Schaar aller Ellipsen, für welche die Summe der Halbaxen gleich der Constanten a ist, wird durch die Gleichung dargestellt:

$$(5) \quad \ldots \quad (a - p)^2 x^2 + p^2 y^2 - p^2 (a - p)^2 = 0.$$

Wie Fig. 12 zeigt, bedeckt diese Schaar ein Stück der Ebene, welches rings von einer aus vier congruenten Stücken bestehenden und mit vier Spitzen versehenen Curve „eingehüllt" ist.

Fig. 12.



Eben diese Curve ist die Enveloppe der Schaar (5), und man veranschauliche sich, dass sich hier in der That die einzelnen Punkte der Enveloppe als Schnittpunkte consecutiver Curven der Schaar auffassen lassen.

Die zweite Gleichung (4) wird, vom Factor 2 abgesehen:

$$(6) \quad (p - a) x^2 + p y^2 + p (a - p)(2p - a) = 0.$$

Die Elimination von p aus (5) und (6) liefert als Gleichung der Enveloppe:

$$(7) \quad \ldots \ldots \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Die Enveloppe ist die als „*Astroide*" benannte Curve.

6. Cubatur der Volumina.

Unter Beibehaltung des bisherigen Coordinatensystems legen wir die Gleichung $z = f(x, y)$ vor und deuten dieselbe wie bisher als eine krumme Fläche F.

In der xy-Ebene möge durch $g(x, y) = 0$ eine geschlossene Curve C dargestellt sein; und es gelte die Voraussetzung, dass für alle Punkte x, y des von C umrandeten Stückes der xy-Ebene die Function $z = f(x, y)$ eindeutig und stetig sei.

Man denke über der Curve C als Grundriss einen Cylinder mit zur z-Axe parallelen Seiten errichtet.

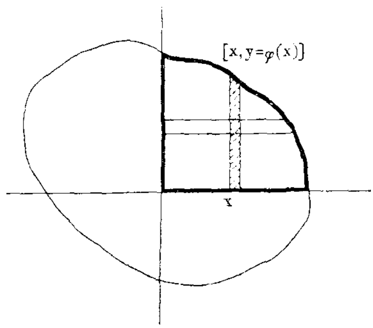
Es sei alsdann durch V' das Volumen des- oder derjenigen Raumstücke bezeichnet, *welche seitlich durch den Mantel des Cylinders, oberhalb und unterhalb aber durch die im Inneren des Cylinders verlaufenden*

Theile der Fläche F und der xy-Ebene eingegrenzt werden. Die Maasszahl für das Volumen eines einzelnen Raumstücks soll hierbei positiv oder negativ in Rechnung gestellt werden, je nachdem dieses Stück oberhalb und unterhalb der xy-Ebene liegt.

Um das Volumen V' in Gestalt eines sogen. „*Doppelintegrales*" auszudrücken, nehmen wir der Einfachheit halber an, dass der Nullpunkt innerhalb des durch die Curve C umschlossenen Flächenstückes liegt. Letzteres wird dann durch die Axen in vier Quadranten zerlegt, und wir können uns auf die Betrachtung des ersten in Fig. 13 stark umrandeten Quadranten beschränken.

Die Curve C schneide die positive x-Axe bei $x = a$ und die positive y-Axe bei $y = b$. Es gelte die Annahme, dass das den bevorzugten Quadranten begrenzende Stück von C für jede Abscisse x zwischen 0 und a stets nur *eine* zugehörige Ordinate $y = \varphi(x)$ liefere [1]).

Fig. 13.



Wir bezeichnen mit V das Volumen des über dem ausgewählten Quadranten gelegenen Theiles des oben eingegrenzten Raumstückes vom Volumen V'.

Zur Bestimmung von V zerlege man die in der xy-Ebene gelegene Grundfläche des fraglichen Raumtheiles durch Parallele zu den Axen in unendlich kleine Rechtecke, wobei der Flächeninhalt eines einzelnen Rechtecks gleich $dx\,dy$ sein wird.

Ueber dem einzelnen Rechtecke steht alsdann vom Volumen V ein vierseitiges Prisma des Volumeninhaltes $z\,dx\,dy = f(x, y)\,dx\,dy$.

Bei constantem x und dx bilde man nun durch Integration nach y zwischen den Grenzen 0 und $\varphi(x)$ den Inhalt derjenigen Scheibe des auszumessenden Raumtheiles, welche oberhalb des in Fig. 13 schraffirten Streifens liegt.

Die Integration nach x zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = a$ vollendet die Bestimmung von V.

Statt zuerst nach y zu integriren, kann man auch mit der Integration nach x beginnen; hierbei möge $x = \psi(y)$ die zu y gehörende Abscisse von C sein.

Lehrsatz: *Das oben ausführlich beschriebene Volumen V kann durch Auswerthung jedes der beiden Doppelintegrale:*

[1]) Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so muss man das von C umrandete Flächenstück in mehrere Theile zerlegen und letztere einzeln behandeln.

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad V = \int_0^a \left(\int_0^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx,$$

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad V = \int_0^b \left(\int_0^{\psi(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

bestimmt werden.

Bei Ausführung des inneren Integrals in (1) bezw. (2) gilt x bezw. y als constant.

Die hiermit geleistete Bestimmung des Cubikinhaltes vom fraglichen Volumen bezeichnet man als „*Cubatur*" desselben.

Als Beispiel diene die Bestimmung des Volumens eines dreiaxigen Ellipsoides, das gegeben ist durch:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Der Ansatz (1) liefert den Rauminhalt eines Octanten des Ellipsoides, wenn wir hier eintragen:

$$f(x,y) = \frac{c}{b} \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}, \quad \varphi(x) = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Man hat somit:

$$(3) \quad \ldots \quad V = \frac{c}{b} \int_0^a \left[dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}\, dy \right].$$

Für das innere Integral hat man nach XI, 4:

$$\int \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}\, dy = \tfrac{1}{2}\, y \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2} + \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \arcsin \frac{y}{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}.$$

Durch Eintragung der Grenzen für y folgt:

$$(4) \quad \ldots \quad V = \frac{\pi b c}{4} \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\pi a b c}{6}.$$

Das Gesammtvolumen des Ellipsoides ist somit $\frac{4}{3}\pi a b c$.

7. Complanation der krummen Flächen.

Vermöge der Doppelintegrale kann man auch die Bestimmung des Flächeninhaltes von Theilen der Fläche F, die sogen. „*Complanation*" der Fläche F, durchführen.

Es sollen hier alle Voraussetzungen und Bezeichnungen von Nr. 6 beibehalten werden; und es liege die Aufgabe vor, *den Inhalt S desjenigen Stückes der Fläche F zu bestimmen, welches oberhalb bezw. unterhalb des in Fig. 13 stark umrandeten Theiles der xy-Ebene liegt.*

Letzteres Stück der xy-Ebene wurde oben in unendlich kleine Rechtecke eingetheilt.

Ueber bezw. unter einem einzelnen solchen Rechtecke, dessen Inhalt $dx\,dy$ ist, liege das Element dS der krummen Fläche F.

Man darf das Element dS als eben ansehen, und man nenne den Neigungswinkel des Elementes gegen die xy-Ebene γ, so dass man die Gleichung $dS \,.\, \cos\gamma = dx\,dy$ gewinnt.

Da γ gleich dem Winkel zwischen der auf dS errichteten Normale und der z-Axe ist, so findet man nach Nr. 3 unter Zugrundelegung der Gleichung $z - f(x, y) = 0$ der krummen Fläche:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Es ergiebt sich hieraus der

Lehrsatz: *Das oben näher bezeichnete Stück der Fläche F hat den Flächeninhalt:*

$$(1) \quad . \quad . \quad S = \int_0^a \left[\int_0^{\varphi(x)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dy\right] dx;$$

man kann den Flächeninhalt S aber auch ausdrücken durch:

$$(2) \quad . \quad . \quad S = \int_0^b \left[\int_0^{\psi(y)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\right] dy.$$

Als Beispiel diene die Complanation der Kugel des Radius r um den Nullpunkt. Zur Bestimmung der Oberfläche S des Kugeloctanten hat man zu setzen:

$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, \qquad \varphi(x) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Bei Benutzung von (1) gilt also der Ansatz:

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S = r \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\right) dx.$$

Nun ist nach Formel (12) in XI, 4:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = arc\,sin \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Durch Eintragung der Grenzen erhält man aus (3):

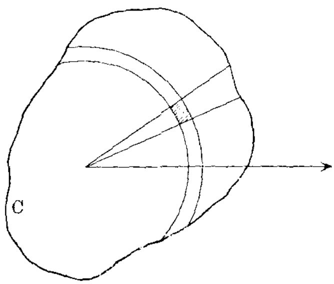
$$S = \frac{\pi r}{2} \int_0^r dx = \tfrac{1}{2} \pi r^2.$$

8. Gebrauch der Polarcoordinaten.

Will man in der xy-Ebene an Stelle der x, y Polarcoordinaten r, ϑ gebrauchen, so wähle man den Nullpunkt als Pol und die positive x-Axe als Axe der Polarcoordinaten.

Möge eine den Pol umziehende, geschlossene Curve C durch $r = \varphi(\vartheta)$ gegeben sein, wobei $\varphi(\vartheta)$ eine eindeutige Function sei; und möge durch die im Inneren von C eindeutige Function $z = f(r, \vartheta)$ eine krumme Fläche F gegeben sein.

Fig. 14.



Zur Cubatur und Complanation von F errichten wir über C einen Cylinder, dessen Seiten zur z-Axe parallel sind, und definiren das Volumen V und die Oberfläche S analog wie in Nr. 6 und 7.

Das in Fig. 14 schraffirte Element der $r\vartheta$-Ebene hat den Flächeninhalt $r\,dr\,d\vartheta$.

Man beweist daraufhin leicht folgenden

Lehrsatz: *Das von dem zu C gehörenden Cylinder, der $r\vartheta$-Ebene und der Fläche F eingegrenzte Volumen V ist:*

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\varphi(\vartheta)} f(r, \vartheta)\, r\, dr \right) d\vartheta,$$

und entsprechend gilt für die Oberfläche S:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad S = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\varphi(\vartheta)} \frac{r\, dr}{\cos\gamma} \right) d\vartheta,$$

wobei γ in derselben Bedeutung, wie in Nr. 7 gebraucht ist.

9. Betrachtung weiterer Beispiele zur Cubatur und Complanation.

1. Die in der xz-Ebene durch $z = e^{-x^2}$ dargestellte Curve hat den in Fig. 15 skizzirten Verlauf und nähert sich von oben her beiderseits asymptotisch der x-Axe.

Durch Rotation dieser Curve um die z-Axe entspringt eine glockenförmig gestaltete Oberfläche F, welche durch $z = e^{-r^2}$ dargestellt ist.

Der zwischen F und der $r\vartheta$-Ebene gelegene Raum hat, obschon er sich nach allen Richtungen der $r\vartheta$-Ebene ins Unendliche zieht, einen endlichen Inhalt V:

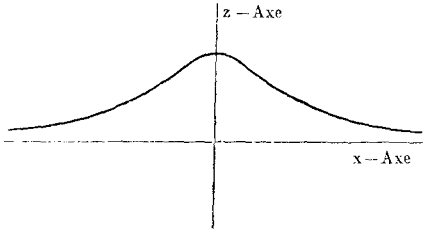
$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr \right) d\vartheta.$$

Da nämlich das innere Integral ϑ nicht mehr enthält, so kann man dasselbe vor das auf ϑ bezogene Integral setzen:

$$V = \left(\int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right).$$

Jedes dieser beiden Integrale ist leicht zu bestimmen, und man findet $V = \pi$.

Fig. 15.



2. Wendet man bei der eben behandelten Aufgabe rechtwinklige Coordinaten x, y an, so hat man nach Nr. 6:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\, dy\right) dx.$$

Spaltet man $e^{-x^2-y^2}$ in das Product von e^{-x^2} und e^{-y^2}, und setzt man den ersten Factor, als von y unabhängig, vor das Integral in Bezug auf y, so folgt:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right) dx.$$

Nun ist das innere Integral von x unabhängig; es ist somit:

$$V = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2.$$

Der Vergleich mit dem Ergebniss in 1. liefert den

Lehrsatz: *Das zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ ausgeführte Integral des Differentials $e^{-x^2}dx$ ist gleich $\sqrt{\pi}$:*

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

3. Durch $y = x\, tg\, z$ ist eine sogen. Schraubenfläche F dargestellt, deren Axe die z-Axe ist.

Als Curve C soll der Kreis $r = 1$ gewählt werden, und es werde die Complanation für einen Quadranten der Fläche F ausgeführt.

Da man hier die Gleichung $z - arctg\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ hat, so gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2 + y^2}}} = \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}}.$$

Man hat also zufolge (2) Nr 8:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\,dr\right)d\vartheta = \left(\int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\right).$$

Durch Ausführung der letzten Integrale gewinnt man:

(2) . . . . . . $S = \frac{\pi}{4}\left[\sqrt{2} + log\,(1 + \sqrt{2})\right].$

Zusätze zum ersten Heft.

Seite 40, Zeile 24 ist hinter den Worten „bei diesem Uebergange" einzuschalten „in den elementaren Fällen".

Seite 48, Zeile 18 ist hinter den Worten „Zahlen m" einzuschalten „ausser $m = -1$".